

Joaquín Luque Rodríguez
Margarita Parada Sanguino

**FUNDAMENTOS DEL
ANÁLISIS FASORIAL**


UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE TECNOLOGÍA ELECTRÓNICA

Joaquín Luque Rodríguez
Margarita Parada Sanguino

FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS FASORIAL

Universidad de Sevilla
Departamento de Tecnología Electrónica
Servicio de Publicaciones
Sevilla, 1996

Facultad de Informática y Estadística
Avenida Reina Mercedes s/n
41012-Sevilla. SPAIN.

 455 70 95

1.- Introducción.

El análisis fasorial es una de las técnicas más utilizadas en el estudio de circuitos eléctricos y electrónicos. Sin embargo es frecuente que el uso de esta técnica no esté acompañado por un conocimiento de los principios fundamentales que la hacen posible. En general es poco y mal conocida la relación entre el análisis fasorial de circuitos y el tratamiento espectral de señales y sistemas. El presente documento pretende aclarar algunos de estos conceptos básicos y, de paso, justificar la validez de una herramienta de trabajo que, como el análisis fasorial, constituye una piedra fundamental en el edificio de la Tecnología Electrónica.

En esta tarea vamos a seguir un desarrollo gradual y por pasos, lo que puede provocar que en medio de una demostración se pierda el sentido global del análisis. Para ayudar a orientarse en la exposición, ésta se estructura de la siguiente forma:

a) El apartado 2 se dedica a desarrollar cual es la respuesta en régimen permanente de un sistema lineal e invariante en el tiempo (LIT). Para ello se procede de la siguiente forma:

a.1) en primer lugar se define lo que es un LIT, demostrando que los LIT verifican el teorema de superposición;

a.2) a continuación se somete a los LIT a una excitación exponencial compleja y se calcula una solución particular para la respuesta, surgiendo en este punto el concepto de función de transferencia;

a.3) en el siguiente paso se generaliza el estudio anterior y se obtiene una respuesta particular de los LIT ante una excitación cualquiera;

a.4) por último se calcula la respuesta general de un LIT ante una excitación cualquiera.

b) En el apartado 3 se introduce la metodología de análisis fasorial y se demuestran las principales leyes que operan en este tipo de análisis. Para ello se procede de la siguiente forma:

b.1) partiendo de los resultados del apartado

anterior, se calcula la respuesta en régimen permanente de un LIT ante una excitación senoidal;
 b.2) fruto de este análisis surge el concepto de fasor y su relación con las representaciones temporal y espectral;
 b.3) a continuación se reformulan las leyes de Kirchhoff con fasores;
 b.4) y, por último, se estudian las relaciones tensión-corriente en diversos elementos de circuitos, introduciendo el concepto de impedancia.

Cualquiera de estos puntos se apoya en las conclusiones de los anteriores, pero ello no implica que su lectura tenga que ser secuencial. Si se conocen algunos de los resultados parciales, o no interesan los detalles de su demostración, puede pasarse a otros punto del análisis conservando siempre la estructura aquí esbozada.

2.- Respuesta espectral de sistemas lineales.

2.1.- Sistemas LIT.

2.1.1.- Definición de sistemas LIT.

Se dice que un sistema es Lineal e Invariante en el Tiempo (LIT), cuando puede ser representado mediante una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, de la forma

$$A_0 f + A_1 \frac{df}{dt} + A_2 \frac{d^2 f}{dt^2} + \dots + A_n \frac{d^n f}{dt^n} = B_0 g + B_1 \frac{dg}{dt} + B_2 \frac{d^2 g}{dt^2} + \dots + B_m \frac{d^m g}{dt^m} \quad 1$$

o abreviadamente

$$\sum_{i=0}^n A_i \frac{d^i f}{dt^i} = \sum_{i=0}^m B_i \frac{d^i g}{dt^i} \quad 2$$

En esta expresión los términos A_i y B_i son constantes (reales o complejas), mientras que f es la excitación o entrada al

sistema, y g es la respuesta o salida del mismo, pudiendo ser también ambas reales o complejas. Esta expresión se puede expresar también de forma simbólica más resumida como

$$P_A(D)f = P_B(D)g \quad 3$$

donde

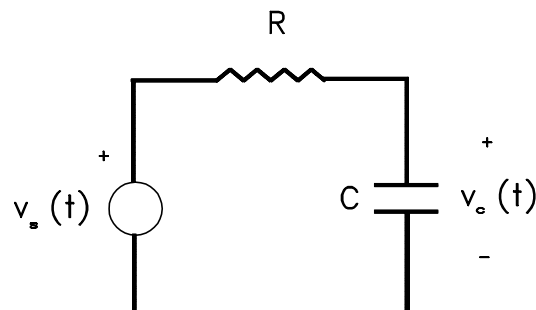
$$P_A(D) = \sum_{i=0}^n A_i \frac{d^i}{dt^i} = \sum_{i=0}^n A_i D^i \quad 4$$

$$P_B(D) = \sum_{i=0}^n B_i \frac{d^i}{dt^i} = \sum_{i=0}^n B_i D^i$$

son polinomios simbólicos que representan las términos de la ecuación diferencial. Nótese que, si bien la ecuación diferencial relaciona la entrada, la salida y el sistema, los polinomios $P_A(D)$ y $P_B(D)$ no dependen para nada de la entrada y la salida, sino sólo y exclusivamente de las características del sistema. Por ello el par $(P_A(D), P_B(D))$ es la representación de un sistema LIT en el dominio del tiempo.

2.1.2.- Ejemplos de sistemas LIT.

1) Sea un circuito constituido por una resistencia y un condensador ideales y conectados en serie, excitado por una fuente $v_s(t)$.



En este circuito, la respuesta del sistema está caracterizada por la tensión en bornes del condensador $v_c(t)$. La ecuación diferencial que gobierna el sistema es

$$\frac{1}{C}v_s(t) = R \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{C}v_c(t) \quad 5$$

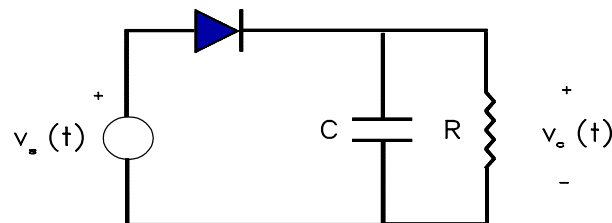
donde R y C son los valores reales de la resistencia y la capacidad.

Esto, según la ecuación general 2 conduciría a $f=v_s(t)$, $A_0=1/C$, $A_1\dots A_n=0$ y $g=v_c(t)$, $B_0=R$, $B_1=1/C$, $B_2\dots B_m=0$ y

$$P_B(D) = R \frac{d}{dt} + \frac{1}{C} \quad 6$$

y $P_A(D) = 1/C$ no dependiendo, por tanto, de la forma particular de $v_s(t)$.

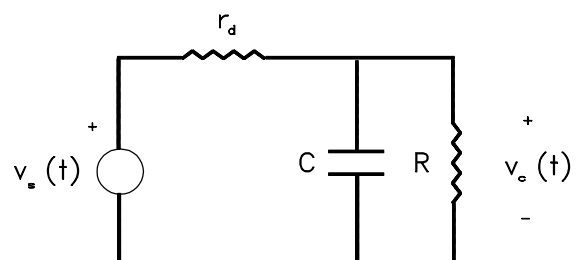
2) Si en el circuito aparece algún dispositivo no lineal, como es el caso del diodo, las técnicas expuestas no son aplicables ya que no se trata de un sistema LIT. Sea, por ejemplo, el circuito de la figura



El análisis de este circuito se tendrá que realizar atendiendo a las características no lineales del diodo, no pudiéndose obtener en él, los polinomios $P_A(D)$ y $P_B(D)$.

Sólo el caso de que la fuente $v_s(t)$ sea tal que polarice el diodo en un punto de trabajo determinado y superponga sobre él pequeñas perturbaciones periódicas,

se podrá realizar un análisis en pequeña señal, modelando el comportamiento del diodo en ese punto mediante una resistencia dinámica r_d tal como se



muestra en la figura.

Este circuito ya sí es un sistema LIT siendo el polinomio $P_B(D)$ en este caso

$$P_B(D) = R_{TH} \frac{d}{dt} + \frac{1}{C} \quad 7$$

donde R_{TH} es la resistencia equivalente Thevenin de r_d y R

$$R_{TH} = \frac{r_d}{r_d + R} \quad 8$$

2.1.3.- El teorema de superposición en sistemas LIT.

Un aspecto importante de los sistemas LIT es que cumplen el teorema de superposición, que puede formularse de la siguiente forma: Sea g_1 la respuesta del sistema ante la excitación f_1 ; sea g_2 la respuesta del sistema ante la excitación f_2 ; si se excita el sistema con una señal f que sea suma de f_1 y f_2 , la respuesta será una señal g , suma de g_1 y g_2 . Esta expresión puede generalizarse para cualquier número de sumandos ponderados. En efecto, sea

$$f = \sum_{j=1}^k C_j f_j \quad 9$$

la excitación a la que se somete un sistema LIT, donde C_j son constantes de ponderación de la suma. Las respuestas g_j (g_1, g_2, \dots, g_k) correspondientes a cada una de las excitaciones parciales f_j deben satisfacer la ecuación 2 que rige el comportamiento del sistema

$$\sum_{i=0}^n A_i \frac{d^i f_j}{dt^i} = \sum_{i=0}^m B_i \frac{d^i g_j}{dt^i} \quad 10$$

Lo mismo ocurre con la excitación general f , y su respuesta g ,

que vendrán ligadas por la expresión, ya conocida

$$\sum_{i=0}^n A_i \frac{d^i f}{dt^i} = \sum_{i=0}^m B_i \frac{d^i g}{dt^i} \quad 11$$

El primer miembro de esta expresión se puede desarrollar de la siguiente forma

$$\sum_{i=0}^n A_i \frac{d^i f}{dt^i} = \sum_{i=0}^n A_i \frac{d^i \left(\sum_{j=1}^k C_j f_j \right)}{dt^i} \quad 12$$

$$\sum_{i=0}^n A_i \frac{d^i f}{dt^i} = \sum_{i=0}^n A_i \left(\sum_{j=1}^k C_j \frac{d^i f_j}{dt^i} \right) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=1}^k A_i C_j \frac{d^i f_j}{dt^i} \right) \quad 13$$

$$\sum_{i=0}^n A_i \frac{d^i f}{dt^i} = \sum_{j=1}^k C_j \left(\sum_{i=0}^n A_i \frac{d^i f_j}{dt^i} \right) \quad 14$$

Recordando 10 podemos escribir

$$\sum_{i=0}^n A_i \frac{d^i f}{dt^i} = \sum_{j=1}^k C_j \left(\sum_{i=0}^m B_i \frac{d^i g_j}{dt^i} \right) \quad 15$$

$$\sum_{i=0}^n A_i \frac{d^i f}{dt^i} = \sum_{i=0}^m \left(\sum_{j=1}^k B_i C_j \frac{d^i g_j}{dt^i} \right) = \sum_{i=0}^m B_i \left(\sum_{j=1}^k C_j \frac{d^i g_j}{dt^i} \right) \quad 16$$

$$\sum_{i=0}^n A_i \frac{d^i f}{dt^i} = \sum_{i=0}^m B_i \frac{d^i \left(\sum_{j=1}^k C_j g_j \right)}{dt^i} \quad 17$$

Comparando la ecuación anterior con la ecuación 11, obtenemos finalmente que, como queríamos demostrar,

$$g = \sum_{j=1}^k C_j g_j \quad 18$$

2.2- Excitación exponencial compleja (solución particular).

Antes de ver el comportamiento general de un sistema LIT ante cualquier excitación, conviene realizar previamente el estudio de un caso particular, rico en consecuencias. Estudiaremos por tanto, la respuesta de un sistema LIT ante una entrada exponencial compleja de la forma

$$f(t) = K e^{j\varphi} e^{j\omega t} \quad 19$$

donde los parámetros K , φ y ω son números reales. Para obtener la salida del sistema ante esa excitación debe resolverse la ecuación diferencial 2 que define su comportamiento. Se puede comprobar fácilmente que la función

$$g(t) = L e^{j\theta} e^{j\omega t} \quad 20$$

satisface la ecuación diferencial y, por tanto, es una **solución particular** de la misma. Para demostrarlo calculemos en primer lugar las derivadas de la función $f(t)$ que son las siguientes:

$$\frac{df(t)}{dt} = K j\omega e^{j\varphi} e^{j\omega t} \quad 21$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = K (j\omega)^2 e^{j\varphi} e^{j\omega t} \quad 22$$

y, generalizando, se obtiene que la derivada de n-ésimo orden es

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = K (j\omega)^n e^{j\varphi} e^{j\omega t} \quad 23$$

Análogamente, se puede escribir para la función g(t) que

$$\frac{d^m g(t)}{dt^m} = L (j\omega)^m e^{j\theta} e^{j\omega t} \quad 24$$

Sustituyendo el valor de estas derivadas en la ecuación diferencial del sistema 2, se tiene

$$\sum_{i=0}^n A_i K (j\omega)^i e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \sum_{i=0}^m B_i L (j\omega)^i e^{j\theta} e^{j\omega t} \quad 25$$

o lo que es igual

$$K e^{j\varphi} e^{j\omega t} \sum_{i=0}^n A_i (j\omega)^i = L e^{j\theta} e^{j\omega t} \sum_{i=0}^m B_i (j\omega)^i \quad 26$$

Denominando función de transferencia del sistema a la relación

$$H(\omega) = \frac{\sum_{i=0}^n A_i (j\omega)^i}{\sum_{i=0}^m B_i (j\omega)^i} \quad 27$$

la ecuación 26 puede reescribirse como

$$K e^{j\varphi} H(\omega) = L e^{j\theta} \quad 28$$

Por tanto, como queríamos demostrar, una solución particular a la salida del sistema toma la forma de la ecuación 20, siempre que se verifique la relación entre los parámetros que aparece en la ecuación 28. Esta ecuación implica una igualdad entre números complejos que puede desglosarse en las igualdades de sus módulos y argumentos, según

$$L = K |H(\omega)|$$

29

$$\theta = \varphi + \arg [H(\omega)]$$

Podemos observar que la función de transferencia de un LIT no depende de la entrada ni de la salida, sino exclusivamente de los parámetros del propio sistema. Es pues, la manera de caracterizar en el dominio de la frecuencia a un sistema LIT, de forma análoga a como el par $(P_f(D), P_g(D))$ representa al sistema en el dominio del tiempo.

Algunos autores definen la función de transferencia de un sistema de otra forma, diciendo que es la transformada de Fourier de la respuesta del sistema a un impulso unitario. Es decir, inyectan en el sistema un impulso $\delta(t)$ y observan la respuesta, que denominan $h(t)$. Por definición llaman función de transferencia del sistema, que denotaremos como $H^*(\omega)$ para distinguirla de nuestra definición, a la transformada de Fourier de $h(t)$. Más adelante demostraremos que ambas definiciones son equivalentes.

2.3- Respuesta con excitación arbitraria (solución particular).

En el apartado anterior estudiamos la respuesta de un sistema LIT ante una excitación exponencial compleja. Esto no era, sin embargo, más que una preparación para poder abordar el caso general en el que la excitación del sistema toma la forma de una función cualquiera $f(t)$. Sabemos que cualquier función (siempre que cumpla unos requisitos mínimos que damos por supuestos) puede expresarse en función de su transformada de Fourier de acuerdo con

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad 30$$

que puede expresarse también como

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K e^{j\varphi} e^{j\omega t} \quad 31$$

donde

$$K = \frac{|F(\omega)| d\omega}{2\pi} \quad 32$$

y

$$\varphi = \arg [F(\omega)] \quad 33$$

Pero la forma que toma $f(t)$, tanto en 30 como en 31, no es sino una suma infinita (integral definida) de exponenciales complejas. Por tanto, aplicando el teorema de superposición, la respuesta del sistema podrá formularse como

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} L e^{j\theta} e^{j\omega t} \quad 34$$

siendo

$$L = K |H(\omega)| = \frac{|F(\omega)| d\omega}{2\pi} |H(\omega)| = \frac{|F(\omega)H(\omega)| d\omega}{2\pi} \quad 35$$

y

$$\theta = \varphi + \arg [H(\omega)] = \arg [F(\omega)] + \arg [H(\omega)] = \arg [F(\omega)H(\omega)] \quad 36$$

Sustituyendo estos valores en 34 se tiene

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(\omega)H(\omega)|d\omega}{2\pi} e^{j \arg[F(\omega)H(\omega)]} e^{j\omega t} \quad 37$$

y reagrupando

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)H(\omega)| e^{j \arg[F(\omega)H(\omega)]} e^{j\omega t} d\omega \quad 38$$

y, por tanto,

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad 39$$

Recordando que

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad 40$$

se tiene finalmente que

$$G(\omega) = F(\omega)H(\omega) \quad 41$$

2.4.- Solución general a la respuesta de sistemas LIT.

Las ecuaciones 39 y 41 son, respectivamente, la representación temporal y espectral de la salida de un sistema LIT ante una excitación cualquiera. Pero, para ser más preciso, habría que matizar y decir que son una solución particular que satisface la ecuación diferencial que rige el comportamiento del sistema. Hay que buscar por tanto una solución general de la ecuación diferencial 2. Al ser una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, se sabe que la solución general es igual a la solución general de la ecuación diferencial homogénea, más una solución

particular de la completa, siendo la ecuación diferencial homogénea

$$P_B(D)g(t) = \sum_{i=0}^m B_i \frac{d^i g(t)}{dt^i} = 0 \quad 42$$

La teoría de las ecuaciones diferenciales nos indica que la solución a una ecuación homogénea como la anterior toma siempre la forma

$$g_h(t) = \sum_{i=1}^m C_i e^{r_i t} \quad 43$$

siendo C_i unas constantes de integración cualesquiera y r_i las raíces del polinomio $P_B(D)$ característico de la ecuación diferencial, es decir los valores que hacen $P_B(r_i) = 0$. Como sabemos, el polinomio característico de la ecuación diferencial homogénea es

$$P_B(D) = B_0 + B_1 D + B_2 D^2 + \dots + B_m D^m \quad 44$$

Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial completa será

$$g_c(t) = g_h(t) + g(t) = g(t) + \sum_{i=1}^m C_i e^{r_i t} \quad 45$$

donde $g(t)$ es la solución particular obtenida en los apartados anteriores. Los valores de r_i dependen exclusivamente de la forma y coeficientes de la ecuación diferencial. Por el contrario, los valores de C_i se deben calcular obligando a que dicha solución verifique las condiciones iniciales en que se encontraba el sistema en el instante inicial.

Por otra parte, los términos exponenciales de la solución general tendrán un comportamiento que dependerá de que r_i sea un número complejo con parte real positiva, un número complejo con parte real negativa, o un número imaginario puro (complejo con parte real nula). Si la parte real es positiva, la salida crece exponencialmente con el tiempo y el sistema es inestable. Si es un número imaginario

puro la salida ofrecerá un comportamiento oscilatorio. Por último, si es un número complejo con parte real negativa la salida se atenúa y tiende a cero a medida que pasa el tiempo, con lo que la contribución de esos sumandos es sólo transitoria.

A efectos prácticos nos limitamos a estudiar los sistemas estables, es decir, los que no tienen comportamientos inestables ni oscilatorios y en los que, por tanto, la salida del sistema con ausencia de excitación se va atenuando exponencialmente después de un período transitorio. Es decir sólo consideraremos los casos en los que las raíces del polinomio $P_B(D)$ son números complejos con parte real negativa. Pero aún en este caso, tenemos que hacer notar que la representación espectral de señales y sistemas se hace corresponder con duraciones temporales infinitas (desde $-\infty$ hasta $+\infty$). Por tanto los posibles transitorios iniciales de un sistema "eterno", se producen en $t=-\infty$. Consideremos la respuesta del sistema ante ausencia de excitación que vendrá dada por

$$g_h(t) = \sum_{i=1}^m C_i e^{r_i t} \quad 46$$

donde los coeficientes r_i son negativos. El transitorio de este sistema se produce como ya hemos indicado en $t=-\infty$, por lo que las constantes C_i hay que determinarlas a partir de las condiciones iniciales en $t=-\infty$.

$$g_h(-\infty) = \sum_{i=1}^m C_i e^{r_i(-\infty)} = \sum_{i=1}^m C_i e^{(\alpha_i + j\beta_i)(-\infty)} = \sum_{i=1}^m C_i e^{+\infty} e^{-j\beta_i \infty} \quad 47$$

Si el valor de la condición inicial $g(-\infty)$ es finita, la única posibilidad de que se cumpla la ecuación es que C_i sea cero. Por tanto en los sistemas LIT estables y "eternos" se cumple que

$$g_c(t) = g(t) \quad 48$$

es decir, que la salida general del sistema coincide con la

estudiada en los apartados anteriores y que queda formulada de manera general en la expresión, ya conocida,

$$G(\omega) = F(\omega)H(\omega) \quad 49$$

Adicionalmente, en este punto se puede demostrar que la definición alternativa dada por otros autores a la función de transferencia de un sistema LIT coincide con nuestra propia definición. Inyectemos al sistema un impulso $\delta(t)$ y denominemos $h(t)$ a la respuesta obtenida. Por definición otros autores llaman función de transferencia del sistema, que denotaremos como $H^*(\omega)$ para distinguirla de nuestra definición, a la transformada de Fourier de $h(t)$. Según la ecuación 49 la función $H^*(\omega)$ puede calcularse como

$$H^*(\omega) = F(\omega)H(\omega) \quad 50$$

siendo $F(\omega)$ la transformada de la función impulso $\delta(t)$. Pero sabemos que esta transformada es igual a la unidad, por lo que, como queríamos demostrar

$$H^*(\omega) = H(\omega) \quad 51$$

y, por tanto, ambas definiciones coinciden. La ventaja de nuestra definición es que pone claramente de manifiesto que la función de transferencia de un sistema depende exclusivamente de sus parámetros constitutivos, sin hacer para nada referencia a las entradas o salidas del mismo.

3.- Fasores.**3.1.- Los LIT ante excitaciones senoidales.**

En los apartados anteriores hemos determinado la forma de obtener el comportamiento de los sistemas LIT para una excitación cualquiera. Vamos a particularizar ahora ese estudio al caso de excitaciones senoidales permanentes. Supongamos que un sistema LIT, con función de transferencia $H(\omega)$, es excitado por una función senoidal $f(t)$ de la forma

$$f(t) = K \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad 52$$

cuya representación espectral es

$$F(\omega) = K \pi [\delta(\omega + \omega_0) e^{-j\varphi} + \delta(\omega - \omega_0) e^{j\varphi}] \quad 53$$

Es importante notar que tanto la representación temporal 52 como la representación frecuencial 53, se refieren a señales senoidales permanentes ("eternas"), no siendo válido el análisis siguiente para períodos transitorios posteriores a la conexión de una excitación senoidal. Con estas consideraciones, la salida del sistema en régimen permanente $g(t)$, podrá ser calculada en función de los resultados anteriores, a través de su representación espectral $G(\omega)$, como

$$G(\omega) = F(\omega)H(\omega) = K \pi [\delta(\omega + \omega_0) e^{-j\varphi} H(\omega) + \delta(\omega - \omega_0) e^{j\varphi} H(\omega)] \quad 54$$

Teniendo en cuenta que por las propiedades de la función delta de Dirac

$$f(x) \delta(x) = f(0) \delta(x) \quad 55$$

y que, por tanto,

$$f(x) \delta(x - a) = f(a) \delta(x - a) \quad 56$$

se puede escribir

$$G(\omega) = K \pi \left[\delta(\omega + \omega_0) e^{-j\varphi} H(-\omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) e^{j\varphi} H(\omega_0) \right] \quad 57$$

Recordando que

$$H(\omega_0) = |H(\omega_0)| e^{j \arg[H(\omega_0)]} \quad 58$$

y que

$$H(-\omega_0) = |H(-\omega_0)| e^{j \arg[H(-\omega_0)]} \quad 59$$

la ecuación 57 puede escribirse como

$$G(\omega) = K \pi \left[\delta(\omega + \omega_0) e^{-j\varphi} |H(-\omega_0)| e^{j \arg[H(-\omega_0)]} + \delta(\omega - \omega_0) e^{j\varphi} |H(\omega_0)| e^{j \arg[H(\omega_0)]} \right] \quad 60$$

Si la ecuación diferencial que rige el comportamiento del sistema LIT tiene los coeficientes reales (sin parte imaginaria), se puede demostrar (ver Anexo) que la función de transferencia $H(\omega)$ tiene un espectro de amplitud con simetría par y un espectro de fase con simetría impar, es decir, que

$$|H(\omega_0)| = |H(-\omega_0)| \quad 61$$

$$\arg[H(\omega_0)] = -\arg[H(-\omega_0)]$$

por lo que la ecuación 60 se transforma en

$$G(\omega) = K \pi \left[\delta(\omega + \omega_0) e^{-j\varphi} |H(\omega_0)| e^{-j \arg[H(\omega_0)]} + \delta(\omega - \omega_0) e^{j\varphi} |H(\omega_0)| e^{j \arg[H(\omega_0)]} \right] \quad 62$$

y operando

$$G(\omega) = K/H(\omega_0)/\pi \left[\delta(\omega + \omega_0) e^{-j(\varphi + \arg[H(\omega_0)])} + \delta(\omega - \omega_0) e^{j(\varphi + \arg[H(\omega_0)])} \right] \quad 63$$

Si llamamos

$$L = K |H(\omega_0)| \quad 64$$

$$\theta = \varphi + \arg [H(\omega_0)]$$

y sustituimos en la expresión anterior, tenemos

$$G(\omega) = L\pi \left[\delta(\omega + \omega_0) e^{-j\theta} + \delta(\omega - \omega_0) e^{j\theta} \right] \quad 65$$

lo cual no es sino la representación espectral de una función senoidal de la forma

$$g(t) = L \cos(\omega_0 t + \theta) \quad 66$$

Resumiendo, cuando un sistema LIT (con coeficientes reales) se excita con una entrada senoidal de la forma

$$f(t) = K \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad 67$$

la respuesta en régimen permanente es también senoidal de la forma

$$g(t) = L \cos(\omega_0 t + \theta) \quad 68$$

obteniéndose las nuevas constantes de amplitud y fase mediante la siguiente expresión

$$L = K |H(\omega_0)| \quad 69$$

$$\theta = \varphi + \arg [H(\omega_0)]$$

3.2.- El concepto de fasor.

Vemos en el desarrollo anterior, que cuando trabajamos con señales senoidales en régimen permanente, las excitaciones y sus respuestas pueden ser caracterizadas por un par de valores: la amplitud y la fase de la senoide. Esto permite representar estas señales mediante un número complejo, que denominaremos fasor, cuyo módulo sea la amplitud de la senoide y su argumento sea la fase de dicha senoide. Así una realidad física, por ejemplo el movimiento de vaivén de unos electrones en un conductor, puede ser representado matemáticamente de tres formas equivalentes: mediante una función temporal

$$f(t) = K \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad 70$$

mediante una función frecuencial

$$F(\omega) = K \pi [\delta(\omega + \omega_0) e^{-j\varphi} + \delta(\omega - \omega_0) e^{j\varphi}] \quad 71$$

o mediante un fasor

$$\tilde{F} = K e^{j\varphi} \quad 72$$

El usar una u otra representación matemática de la misma realidad física es, por tanto, una cuestión de conveniencia. El amplio uso de la representación fasorial estriba en la facilidad con la que se pueden realizar los cálculos. En efecto, la respuesta en régimen permanente de un sistema con función de transferencia $H(\omega)$ a la excitación anterior es, representado en términos fasoriales, otro fasor

$$\tilde{G} = L e^{j\theta} \quad 73$$

en la que los parámetros de la salida pueden ser calculados a partir de los parámetros de la entrada mediante la expresión, ya conocida

$$L = K |H(\omega_0)| \quad 74$$

$$\theta = \varphi + \arg [H(\omega_0)]$$

Estas tres últimas expresiones pueden ser agrupadas de la siguiente forma

$$\tilde{G} = L e^{j\theta} = K |H(\omega_0)| e^{j(\varphi + \arg[H(\omega_0)])} \quad 75$$

desarrollando la exponencial y reordenando términos se tiene

$$\tilde{G} = K e^{j\varphi} |H(\omega_0)| e^{j \arg[H(\omega_0)]} \quad 76$$

que comparando con las ecuaciones 72 y 58 nos lleva a

$$\tilde{G} = \tilde{F} H(\omega_0) \quad 77$$

Vemos pues que, mediante el análisis fasorial, la respuesta en régimen permanente a excitaciones senoidales se puede calcular mediante sencillas operaciones algebraicas entre números complejos.

3.3.- Análisis fasorial de circuitos: leyes de Kirchhoff.

En el apartado anterior hemos enunciado el concepto de fasor y se ha mostrado como una herramienta apropiada para el análisis en régimen permanente de sistemas LIT estables con excitaciones senoidales. Uno de los campos donde es ampliamente utilizado el cálculo fasorial es en el análisis de circuitos eléctricos. Para realizar este análisis habrá que extender las leyes de la teoría de circuitos, originalmente formuladas en el dominio temporal, al ámbito frecuencial y fasorial. A ello dedicaremos este apartado y el siguiente, estudiando ahora la ley de Kirchhoff de las tensiones y la ley de Kirchhoff de las intensidades, y reservando para el próximo apartado las leyes de comportamiento de los principales elementos de circuito.

La ley de Kirchhoff de las tensiones afirma que la suma de tensiones a lo largo de una malla es cero. La formulación temporal de esta ley es

$$\sum_j v_j(t) = 0 \quad 78$$

Para extender esta ley al dominio frecuencial no tenemos más que aplicar la transformada de Fourier a la misma, con lo que obtenemos

$$F\left[\sum_j v_j(t)\right] = 0 \quad 79$$

$$\sum_j F[v_j(t)] = 0 \quad 80$$

y finalmente

$$\sum_j V_j(\omega) = 0 \quad 81$$

que es la expresión frecuencial de la mencionada ley. Si ahora queremos extenderla al dominio fasorial debemos recordar que las señales, en este caso las tensiones, son senoides que se expresan temporalmente como

$$v_j(t) = K_j \cos(\omega_0 t + \varphi_j) \quad 82$$

frecuencialmente toman la forma

$$V_j(\omega) = K_j \pi [\delta(\omega + \omega_0) e^{-j\varphi_j} + \delta(\omega - \omega_0) e^{j\varphi_j}] \quad 83$$

y, finalmente, se pueden expresar mediante los fasores

$$\tilde{V}_j = K_j e^{j\varphi_j} \quad 84$$

Recordando 81 se puede escribir

$$\sum_j K_j \pi \left[\delta(\omega + \omega_0) e^{-j\varphi_j} + \delta(\omega - \omega_0) e^{j\varphi_j} \right] \quad 85$$

$$\sum_j K_j \pi \delta(\omega + \omega_0) e^{-j\varphi_j} + \sum_j K_j \pi \delta(\omega - \omega_0) e^{j\varphi_j} \quad 86$$

$$\pi \delta(\omega + \omega_0) \sum_j K_j e^{-j\varphi_j} + \pi \delta(\omega - \omega_0) \sum_j K_j e^{j\varphi_j} \quad 87$$

donde las expresiones dentro de los sumatorios se corresponden con los valores fasoriales de las tensiones y sus conjugados

$$\pi \delta(\omega + \omega_0) \sum_j \tilde{V}_j^* + \pi \delta(\omega - \omega_0) \sum_j \tilde{V}_j \quad 88$$

El primer término de la ecuación anterior representa una componente espectral en $\omega = -\omega_0$, y el segundo término corresponde a una segunda componente espectral en $\omega = +\omega_0$. Para que se cumpla la ecuación, ambas componentes tienen que ser nulas por lo que

$$\begin{cases} \sum_j \tilde{V}_j = 0 \\ \sum_j \tilde{V}_j^* = 0 \end{cases} \quad 89$$

Pero si una suma de números complejos es nula, es porque tanto su parte real como la imaginaria son nulas y, por tanto, también la suma de los conjugados de dichos complejos debe ser nula. En definitiva las dos ecuaciones de la

expresión anterior son redundantes y pueden simplificarse como

$$\sum_j \tilde{V}_j \qquad \qquad \qquad \mathbf{90}$$

que es la expresión fasorial de la ley de Kirchhoff de las tensiones.

Análogamente puede procederse con la ley de Kirchhoff de las intensidades que afirma que la suma de intensidades en un nudo es cero. Las formulaciones temporal, frecuencial y fasorial de estas leyes son, respectivamente, las siguientes:

$$\sum_j i_j(t) = 0 \qquad \qquad \qquad \mathbf{91}$$

$$\sum_j I_j(\omega) = 0 \qquad \qquad \qquad \mathbf{92}$$

$$\sum_j \tilde{I}_j \qquad \qquad \qquad \mathbf{93}$$

3.4.- Análisis fasorial: elementos de circuitos.

Hemos visto en el apartado anterior cómo se formulan en el ámbito fasorial las leyes de Kirchhoff de las tensiones y las intensidades. El segundo pilar en el que se fundamenta el análisis de circuitos es en las relaciones entre tensión e intensidad en los diferentes elementos que los constituyen: fuentes, resistencias, condensadores, bobinas, etc. Veamos algunos de estos casos:

a) Fuente ideal de tensión. Una fuente ideal de tensión es un elemento de circuito que suministra en bornas una tensión independientemente de la intensidad que circula por él. Por tanto, no hay relación entre tensión e intensidad y la fuente viene dada por la tensión que suministra.

b) Fuente ideal de intensidad. Una fuente ideal de intensidad es un elemento de circuito que suministra una intensidad independientemente de la tensión que haya en sus bornas. Por tanto, no hay relación entre tensión e intensidad y la fuente viene dada por la intensidad que suministra.

c) Resistencia. La tensión y la intensidad en una resistencia se expresan en el dominio temporal de acuerdo con la conocida ley de Ohm

$$v(t) = i(t) R \quad 94$$

Pero una resistencia puede verse también como un sistema LIT en el que la excitación es la intensidad ($f(t)$) y la respuesta es la tensión ($g(t)$). Es por tanto posible obtener su función de transferencia sin más que aplicar los parámetros que se derivan de la ecuación anterior a la expresión

$$H(\omega) = \frac{\sum_{i=0}^n A_i (j\omega)^i}{\sum_{i=0}^m B_i (j\omega)^i} \quad 95$$

que define la función de transferencia de un sistema. En este

caso $n=0$, $A_0=R$, $m=0$ y $B_0=1$, por lo que

$$H(\omega) = R \quad 96$$

Cuando se considera a los elementos de circuitos como sistemas LIT excitados por intensidad y con la tensión como respuesta, la función de transferencia correspondiente suele denominarse impedancia y se denota por $Z(\omega)$, por lo que la ecuación anterior se transforma en

$$Z(\omega) = R \quad 97$$

Por otra parte, recordando la ecuación (77), podemos escribir

$$\tilde{V} = \tilde{I} Z(\omega_0) \quad 98$$

o más abreviadamente

$$\tilde{V} = \tilde{I} Z \quad 99$$

que es, en el dominio fasorial, la relación entre tensión e intensidad para cualquier elemento de circuito. En el caso de resistencias esa expresión se convierte en

$$\tilde{V} = \tilde{I} R \quad 100$$

d) Bobinas. La tensión y la intensidad en una bobina se expresan en el dominio temporal de acuerdo con la expresión

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad 101$$

Por análogo razonamiento al caso anterior, éste es un sistema LIT en el que $n=1$, $A_0=0$, $A_1=L$, $m=0$ y $B_0=1$, por lo que

$$Z(\omega) = j\omega L \quad 102$$

y la relación entre la tensión y la intensidad se expresa en el dominio fasorial como

$$\tilde{V} = \tilde{I} j\omega_0 L \quad 103$$

e) Condensadores. La tensión y la intensidad en un condensador se expresan en el dominio temporal de acuerdo con la expresión

$$C \frac{dv(t)}{dt} = i(t) \quad 104$$

Por análogo razonamiento a los casos anteriores, éste es un sistema LIT en el que $n=0$, $A_0=1$, $m=1$, $B_0=0$ y $B_1=C$, por lo que

$$Z(\omega) = \frac{1}{j\omega C} \quad 105$$

y la relación entre la tensión y la intensidad se expresa en el dominio fasorial como

$$\tilde{V} = \frac{\tilde{I}}{j\omega_0 C} \quad 106$$

f) Otros elementos lineales. El resto de dispositivos lineales habituales en los circuitos eléctricos se puede expresar como una combinación serie o paralelo de los elementos anteriores, por lo que su estudio no presenta ningún problema adicional. Sea un primer elemento de circuito excitado por una intensidad i_1 , con respuesta (tensión entre sus bornes) v_1 y con impedancia Z_1 . Sea un segundo elemento de circuito excitado por una intensidad i_2 , con respuesta (tensión entre sus bornes) v_2 y con impedancia Z_2 . Consideremos al elemento de circuito formado por la combinación de los dos anteriores, el cual es excitado por una intensidad i , con respuesta (tensión entre sus bornes) v , y con impedancia Z .

Todos estos valores están relacionados en el dominio fasorial por las expresiones

$$\tilde{V}_1 = \tilde{I}_1 Z_1$$

$$\tilde{V}_2 = \tilde{I}_2 Z_2 \quad 107$$

$$\tilde{V} = \tilde{I} Z$$

En estas circunstancias, el elemento resultante presenta una impedancia cuyo valor es fácil de calcular. En efecto, si los elementos se conectan en serie, entonces se cumple que

$$\tilde{I} = \tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 \quad 108$$

$$\tilde{V} = \tilde{V}_1 + \tilde{V}_2$$

por lo que, sustituyendo,

$$\tilde{I} Z = \tilde{I}_1 Z_1 + \tilde{I}_2 Z_2 = \tilde{I} Z_1 + \tilde{I} Z_2 = \tilde{I} (Z_1 + Z_2) \quad 109$$

y finalmente obtenemos que

$$Z = Z_1 + Z_2 \quad 110$$

Si por el contrario los elementos se conectan en paralelo se cumple que

$$\tilde{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 \quad 111$$

$$\tilde{V} = \tilde{V}_1 = \tilde{V}_2$$

por lo que, sustituyendo,

$$\frac{\tilde{V}}{Z} = \frac{\tilde{V}_1}{Z_1} + \frac{\tilde{V}_2}{Z_2} = \frac{\tilde{V}}{Z_1} + \frac{\tilde{V}}{Z_2} = \tilde{V} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) \quad 112$$

y finalmente obtenemos que

$$\frac{I}{Z} = \frac{I}{Z_1} + \frac{I}{Z_2} \quad 113$$

Se observa que la relación de impedancias en el ámbito fasorial sigue las mismas reglas que la asociación de resistencias en el dominio temporal.

g) Elementos no lineales. En numerosos circuitos electrónicos aparecen elementos no lineales (diodos, transistores, etc.). Dado que el concepto de función de transferencia y todo el análisis fasorial se ha construido sobre la hipótesis básica de sistemas lineales, no es posible aplicar esta herramienta al estudio de circuitos con elementos no lineales. Sin embargo, es posible hacer análisis parciales, denominados habitualmente de pequeña señal, en los cuales se inyectan pequeñas perturbaciones senoidales al circuito que ya funciona en un determinado punto de trabajo. Si frente a estas pequeñas perturbaciones se puede modelar el circuito con elementos lineales, es posible aplicar el análisis fasorial para determinar la respuesta del sistema, obtenida ésta como una desviación del punto de trabajo que se calcula por otros métodos de análisis no lineal.

4.- Conclusiones.

Se han mostrado a lo largo de este documento las bases que permiten el cálculo fasorial, una herramienta de análisis de sistemas LIT cuando son excitados por señales senoidales en régimen permanente. La facilidad en el manejo de esta técnica justifica su amplio uso en el estudio de estos sistemas y principalmente su aplicación al análisis de circuitos eléctricos. A modo de resumen, se recogen en la tabla adjunta diferentes conceptos y su representación en los dominios temporal, frecuencial y fasorial.

	Dominio temporal	Dominio frecuencial	Dominio fasorial
Señal	$f(t)$	$F(\omega)$	\tilde{F}
Sistema	$(P_A(D), P_B(D))$	$H(\omega)$	$H(\omega_0)$
Oscilación	$K \text{sen}(\omega_0 t + \varphi)$	$K\pi[\delta(\omega + \omega_0)e^{-j\varphi} + \delta(\omega - \omega_0)e^{j\varphi}]$	$K e^{j\varphi}$
Cálculo de las salidas	$P_A(D)f(t) = P_B(D)g(t)$	$G(\omega) = F(\omega)H(\omega)$	$\tilde{G} = \tilde{F} H(\omega_0)$
1ª ley de Kirchhoff	$\sum i(t) = 0$	$\sum I(\omega) = 0$	$\sum \tilde{I} = 0$
2ª ley de Kirchhoff	$\sum v(t) = 0$	$\sum V(\omega) = 0$	$\sum \tilde{V} = 0$
Ley de Ohm básica	$v(t) = i(t)R$	$V(\omega) = I(\omega)R$	$\tilde{V} = \tilde{I} R$
Ley de Ohm generalizada		$V(\omega) = I(\omega)Z(\omega)$	$\tilde{V} = \tilde{I} Z(\omega_0)$

ANEXOSIMETRÍA DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE UN SISTEMA.

Si la ecuación diferencial que rige el comportamiento de un sistema LIT tiene los coeficientes reales (sin parte imaginaria), se puede demostrar que la función de transferencia $H(\omega)$ tiene un espectro de amplitud con simetría par y un espectro de fase con simetría impar, es decir, que

$$|H(\omega)| = |H(-\omega)| \quad (\text{A-1})$$

$$\arg[H(\omega)] = -\arg[H(-\omega)]$$

En efecto, como sabemos la función de transferencia de un sistema se define como

$$H(\omega) = \frac{\sum_{i=0}^n A_i (j\omega)^i}{\sum_{i=0}^m B_i (j\omega)^i} \quad (\text{A-2})$$

por tanto su espectro de amplitud será

$$|H(\omega)| = \frac{\left| \sum_{i=0}^n A_i (j\omega)^i \right|}{\left| \sum_{i=0}^m B_i (j\omega)^i \right|} \quad (\text{A-3})$$

desarrollando

$$|H(\omega)| = \frac{\left| A_0 + A_1(j)\omega + A_2(-1)\omega^2 + A_3(-j)\omega^3 + A_4(1)\omega^4 + A_5(j)\omega^5 + \dots \right|}{\left| B_0 + B_1(j)\omega + B_2(-1)\omega^2 + B_3(-j)\omega^3 + B_4(1)\omega^4 + B_5(j)\omega^5 + \dots \right|} \quad (\text{A-4})$$

agrupando las partes real e imaginaria

$$|H(\omega)| = \frac{\left| (A_0 - A_2\omega^2 + A_4\omega^4 + \dots) + j(A_1\omega - A_3\omega^3 + A_5\omega^5 + \dots) \right|}{\left| (B_0 - B_2\omega^2 + B_4\omega^4 + \dots) + j(B_1\omega - B_3\omega^3 + B_5\omega^5 + \dots) \right|} \quad (\text{A-5})$$

Calculando los módulos

$$|H(\omega)| = \frac{\sqrt{[A_0 - A_2\omega^2 + A_4\omega^4 + \dots]^2 + [A_1\omega - A_3\omega^3 + A_5\omega^5 + \dots]^2}}{\sqrt{[B_0 - B_2\omega^2 + B_4\omega^4 + \dots]^2 + [B_1\omega - B_3\omega^3 + B_5\omega^5 + \dots]^2}} \quad (\text{A-6})$$

Si sustituimos ahora ω por $-\omega$, tenemos

$$|H(-\omega)| = \frac{\sqrt{[A_0 - A_2(-\omega)^2 + A_4(-\omega)^4 + \dots]^2 + [A_1(-\omega) - A_3(-\omega)^3 + A_5(-\omega)^5 + \dots]^2}}{\sqrt{[B_0 - B_2(-\omega)^2 + B_4(-\omega)^4 + \dots]^2 + [B_1(-\omega) - B_3(-\omega)^3 + B_5(-\omega)^5 + \dots]^2}} \quad (\text{A-7})$$

Operando

$$|H(-\omega)| = \frac{\sqrt{[A_0 - A_2\omega^2 + A_4\omega^4 + \dots]^2 + [(-1)(A_1\omega - A_3\omega^3 + A_5\omega^5 + \dots)]^2}}{\sqrt{[B_0 - B_2\omega^2 + B_4\omega^4 + \dots]^2 + [(-1)(B_1\omega - B_3\omega^3 + B_5\omega^5 + \dots)]^2}} \quad (\text{A-8})$$

y finalmente

$$|H(-\omega)| = \frac{\sqrt{[A_0 - A_2\omega^2 + A_4\omega^4 + \dots]^2 + [A_1\omega - A_3\omega^3 + A_5\omega^5 + \dots]^2}}{\sqrt{[B_0 - B_2\omega^2 + B_4\omega^4 + \dots]^2 + [B_1\omega - B_3\omega^3 + B_5\omega^5 + \dots]^2}} \quad (\text{A-9})$$

Si comparamos esta expresión con la 6, podemos afirmar que

$$|H(\omega)| = |H(-\omega)| \quad (\text{A-10})$$

lo que demuestra la simetría par del espectro de amplitud de la función de transferencia.

De manera análoga se puede proceder para mostrar la

simetría impar del espectro de fase. En efecto, recordando la definición de función de transferencia 2, podemos escribir

$$\arg[H(\omega)] = \arg \left[\sum_{i=0}^n A_i (j\omega)^i \right] - \arg \left[\sum_{i=0}^m B_i (j\omega)^i \right] \quad (\text{A-11})$$

desarrollando

$$\begin{aligned} \arg[H(\omega)] = & \arg \left[A_0 + A_1(j)\omega + A_2(-1)\omega^2 + A_3(-j)\omega^3 + A_4(1)\omega^4 + A_5(j)\omega^5 + \dots \right] \\ & - \arg \left[B_0 + B_1(j)\omega + B_2(-1)\omega^2 + B_3(-j)\omega^3 + B_4(1)\omega^4 + B_5(j)\omega^5 + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

agrupando las partes real e imaginaria

$$\begin{aligned} \arg[H(\omega)] = & \arg \left[(A_0 - A_2\omega^2 + A_4\omega^4 + \dots) + j(A_1\omega - A_3\omega^3 + A_5\omega^5 + \dots) \right] \\ & - \arg \left[(B_0 - B_2\omega^2 + B_4\omega^4 + \dots) + j(B_1\omega - B_3\omega^3 + B_5\omega^5 + \dots) \right] \end{aligned} \quad (\text{A-13})$$

Calculando los argumentos

$$\begin{aligned} \arg[H(\omega)] = & \arctg \frac{-[A_1\omega - A_3\omega^3 + A_5\omega^5 + \dots]}{[A_0 - A_2\omega^2 + A_4\omega^4 + \dots]} \\ & - \arctg \frac{-[B_1\omega - B_3\omega^3 + B_5\omega^5 + \dots]}{[B_0 - B_2\omega^2 + B_4\omega^4 + \dots]} \end{aligned} \quad (\text{A-14})$$

Si sustituimos ahora ω por $-\omega$, tenemos

$$\begin{aligned} \arg[H(-\omega)] = & \arctg \frac{-[A_1(-\omega) - A_3(-\omega)^3 + A_5(-\omega)^5 + \dots]}{[A_0 - A_2(-\omega)^2 + A_4(-\omega)^4 + \dots]} \\ & - \arctg \frac{-[B_1(-\omega) - B_3(-\omega)^3 + B_5(-\omega)^5 + \dots]}{[B_0 - B_2(-\omega)^2 + B_4(-\omega)^4 + \dots]} \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

Operando

$$\begin{aligned} \arg [H(-\omega)] = & \operatorname{arctg} \frac{-(-1)[A_1\omega - A_3\omega^3 + A_5\omega^5 + \dots]}{[A_0 - A_2\omega^2 + A_4\omega^4 + \dots]} \\ & - \operatorname{arctg} \frac{-(-1)[B_1\omega - B_3\omega^3 + B_5\omega^5 + \dots]}{[B_0 - B_2\omega^2 + B_4\omega^4 + \dots]} \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

y finalmente

$$\begin{aligned} \arg [H(-\omega)] = & - \left(\operatorname{arctg} \frac{-[A_1\omega - A_3\omega^3 + A_5\omega^5 + \dots]}{[A_0 - A_2\omega^2 + A_4\omega^4 + \dots]} \right. \\ & \left. - \operatorname{arctg} \frac{-[B_1\omega - B_3\omega^3 + B_5\omega^5 + \dots]}{[B_0 - B_2\omega^2 + B_4\omega^4 + \dots]} \right) \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

Si comparamos esta expresión con la 14, podemos afirmar que

$$\arg [H(\omega)] = -\arg [H(-\omega)] \quad (\text{A-18})$$

lo que demuestra la simetría impar del espectro de amplitud de la función de transferencia.