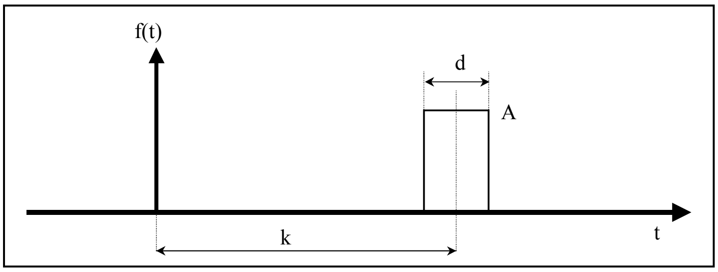
Problema PTC0001-02

a) Calcular y dibujar los espectros de amplitud y fase de la función de la figura.
b) Aplicarlo al caso en que k = 0.



Solución PTC0001-02

Apartado a)
Lo primero que se ha de tener en cuenta es que la función no es periódica, por lo que hay que hallar su transformada:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt=\int_{k-\frac{d}{2}}^{k+\frac{d}{2}} A\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt=\frac{A}{-j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{k-\frac{d}{2}}^{k+\frac{d}{2}}=\frac{A}{-j\omega}\left(e^{-j\omega k}e^{-j\omega\frac{d}{2}}-e^{-j\omega k}e^{+j\omega\frac{d}{2}}\right)$$

$$F(\omega)=\frac{A}{-j\omega}e^{-j\omega k}\left(e^{-j\omega\frac{d}{2}}-e^{+j\omega\frac{d}{2}}\right)=\frac{A}{j\omega}e^{-j\omega k}\left(e^{+j\omega\frac{d}{2}}-e^{-j\omega\frac{d}{2}}\right)$$

$$F(\omega)=\frac{A}{j\omega}e^{-j\omega k}\frac{\left(e^{+j\omega\frac{d}{2}}-e^{-j\omega\frac{d}{2}}\right)}{2j}\cdot 2j=\frac{2A}{\omega}e^{-j\omega k}\operatorname{sen}\left(\frac{\omega\cdot d}{2}\right)=\frac{2A}{\omega}e^{-j\omega k}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega\cdot d}{2}\right)}{\frac{\omega\cdot d}{2}}\frac{\omega\cdot d}{2}$$

$$\boxed{F(\omega)=A\cdot d\cdot e^{-j\omega k}\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot d}{2}\right)}$$

$$\left|F(\omega)\right|=\left|e^{-j\omega k}\right|\cdot\left|A\cdot d\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot d}{2}\right)\right|=\left|e^{-j\omega k}\right|\cdot A\cdot d\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot d}{2}\right)$$

Sabemos que

$$e^{-j\omega k}=\cos(\omega\cdot k)-j\operatorname{sen}(\omega\cdot k)$$

por lo que

$$\left|e^{-j\omega k}\right| = \left|\cos(\omega \cdot k) - j\,\mathrm{sen}(\omega \cdot k)\right| = \sqrt{\cos^2(\omega \cdot k) + \mathrm{sen}^2(\omega \cdot k)} = 1$$

y, sustituyendo tenemos

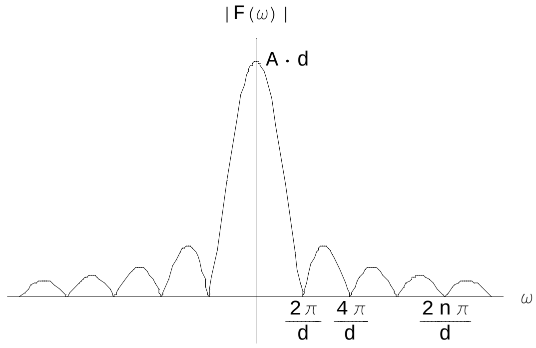
$$\left|F(\omega)\right| = A \cdot d \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot d}{2}\right)$$

Los cortes del espectro de amplitud con el eje de abscisas se producen cuando

$$Sa\left(\frac{\omega \cdot d}{2}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{sen}\left(\frac{\omega \cdot d}{2}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\omega \cdot d}{2} = n \cdot \pi$$

$$\omega = \frac{2 \cdot n \cdot \pi}{d}$$

Por tanto el espectro de amplitud toma la forma del de la figura



Por otra parte,

$$\arg[F(\omega)] = \arg\left[e^{-j\omega k}\right] + \arg\left[A \cdot d \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot d}{2}\right)\right] = \arg\left[e^{-j\omega k}\right] + \arg\left[Sa\left(\frac{\omega \cdot d}{2}\right)\right]$$

En esta expresión el segundo término no tiene parte imaginaria y su argumento es cero o π, según sea positivo o negativo el número real. De las expresiones anteriores tenemos que

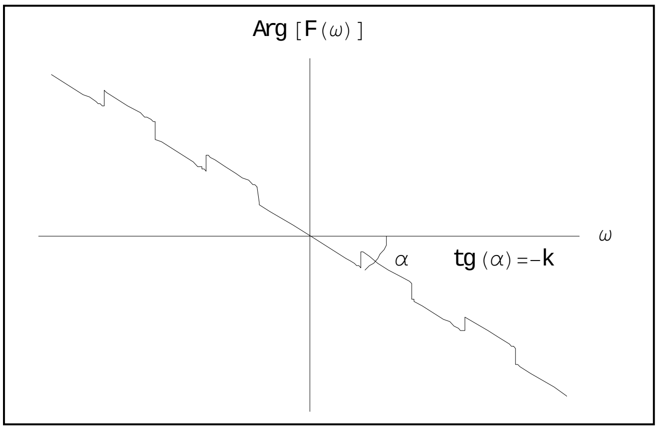
$$\arg\left[e^{-j\omega k}\right] = \arg[\cos(\omega \cdot k) - j sen(\omega \cdot k)] = arctg\,\frac{-sen(\omega \cdot k)}{\cos(\omega \cdot k)}$$

$$\arg\left[e^{-j\omega k}\right] = arctg[-tg(\omega \cdot k)] = -arctg[tg(\omega \cdot k)] = -\omega \cdot k$$

por lo que sustituyendo tenemos

$$\arg[F(\omega)] = -\omega \cdot k + \arg\left[Sa\left(\frac{\omega \cdot d}{2}\right)\right]$$

Por tanto el espectro de fase toma la forma del de la figura



La pendiente del espectro de fase indica el desplazamiento temporal de las componentes espectrales. En este caso todas tienen el mismo retraso *k*.

Apartado b)
Si *k=0*, entonces

$$F(\omega) = A\cdot d\cdot e^{-j\omega 0}\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot d}{2}\right) = A\cdot d\cdot 1\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot d}{2}\right) = A\cdot d\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot d}{2}\right)$$

$$\left|F(\omega)\right| = A\cdot d\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot d}{2}\right)$$

$$\arg\left[F(\omega)\right] = -\omega\cdot k + \arg\left[Sa\left(\frac{\omega\cdot d}{2}\right)\right] = \arg\left[Sa\left(\frac{\omega\cdot d}{2}\right)\right]$$

Vemos que el espectro de amplitud no cambia, pero sí varía el espectro de fase.

Otra forma de abordar el problema es a partir de la propiedad de desplazamiento en el tiempo. Si suponemos conocida la transformada de un pulso *p(t)* centrado en el origen, de amplitud *A* y ancho *d*, que vale

$$P(\omega) = A\cdot d\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot d}{2}\right)$$

entonces, aplicando la propiedad de que

$$\Im\left[g(t-t_0)\right] = e^{-j\omega t_0}G(\omega)$$

tenemos que, como la función dada es *f(t)=p(t-k)*, entonces

$$F(\omega) = e^{-e\omega k}P(\omega) = e^{-e\omega k}A\cdot d\cdot Sa\left(\frac{\omega\cdot d}{2}\right)$$

que es el mismo resultado obtenido anteriormente