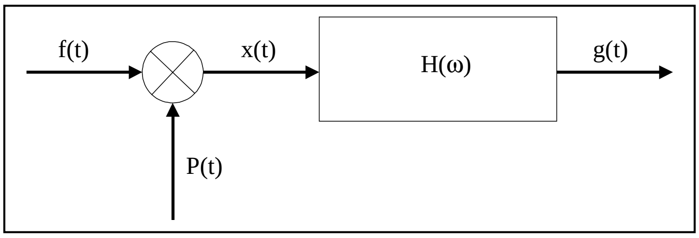
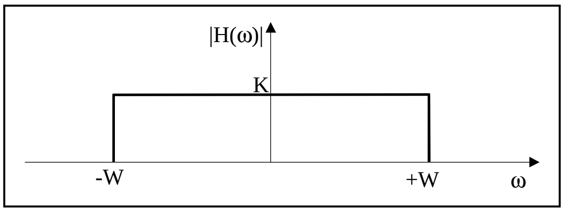
Problema PTC0001-05

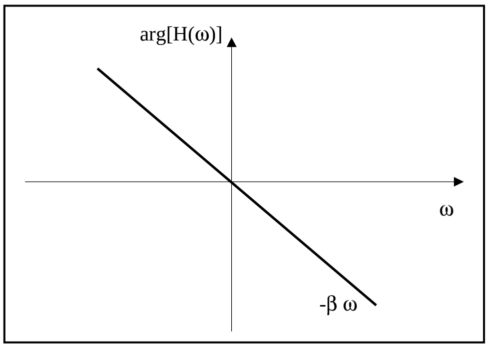
Considérese el sistema de la figura.

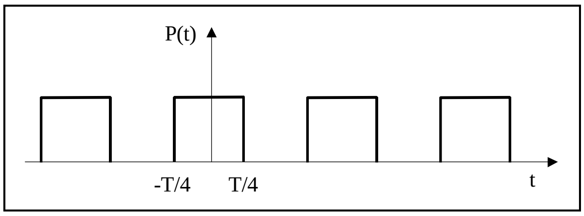
a) P(t) es un tren de pulsos cuadrados con un periodo $T = \pi / W$, y *f(t)* es una señal que no tiene armónicos más allá de la pulsación angular *W*. Determínense los parámetros *K* y β del filtro ideal de manera que *g(t) = f(t)*.

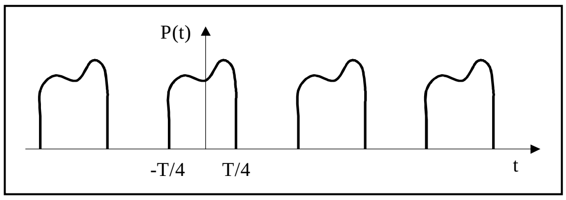
b) Debido a un fallo en el generador de pulsos, los pulsos P(t), aunque todavía periódicos, comienzan a salir no planos y de formas arbitrarias tal como se muestra en la figura. Suponiendo $\beta = 0$ indicar razonadamente si, en estas circunstancias, podrá recuperarse la señal original *f(t)*.











Solución PTC0001-05

Veamos en primer lugar si se cumple el teorema del muestreo, es decir, si el pulso de muestreo P(t) es de una frecuencia mayor o igual al doble de la máxima componente espectral de f(t). Esta máxima componente espectral es, según el enunciado W rad/seg. Por ello la frecuencia de muestreo debe ser

$$f_s \geq 2\frac{W}{2\pi} = \frac{W}{\pi}$$

Pero el periodo de la señal P(t) es, según el enunciado, $T = \pi / W$, por lo que su frecuencia será

$$f_s = \frac{1}{T} = \frac{W}{\pi}$$

por lo que comprobamos que verifica el teorema de muestreo.

La señal de salida es $x(t) = f(t) \cdot P(t)$. Pero *P(t)* es una señal periódica que, como sabemos, admite un desarrollo en serie exponencial compleja de Fourier del tipo

$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{jnw_s t}; \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{T}$$

donde K_n son los coeficientes que marcan la importancia de cada armónico y, por lo tanto dependen sólo de n y no de ω. Por ello, la señal muestreada puede expresarse como

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n f(t) e^{jnw_s t}$$

El espectro de la señal muestreada será

$$X(\omega) = \Im\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n f(t) e^{jnw_s t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Im\left[K_n f(t) e^{jnw_s t}\right]$$

Como K_n no depende de ω

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n \Im\left[f(t) e^{jnw_s t}\right]$$

Pero, por las propiedades de la transformada de Fourier, sabemos que

$$\Im\left[f(t) e^{jat}\right] = F(\omega - a)$$

por lo que el espectro de la señal muestreada queda definitivamente como

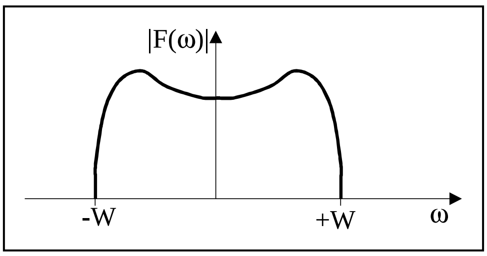
$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n F(\omega - n\omega_s)$$

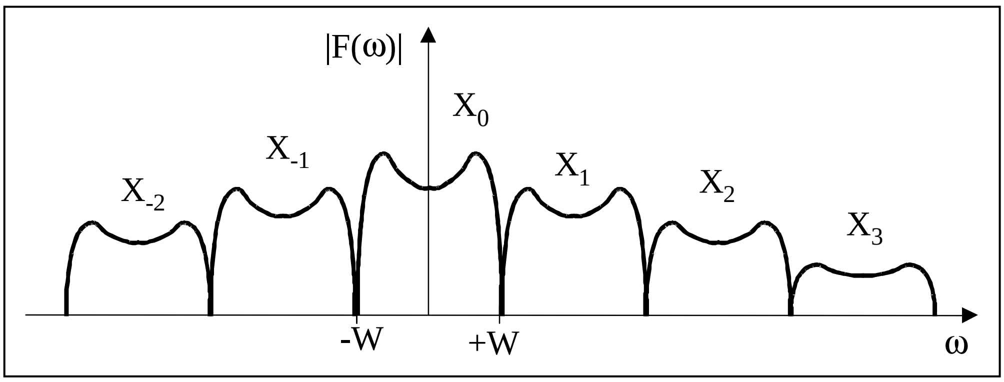
Si la señal de muestreo es una señal periódica de período T, entonces se tiene que

$$K_n = \frac{\tau}{T_s} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T_s}\right); \qquad T_s = T; \qquad \tau = \frac{T}{2}$$

Si suponemos que F(ω) tiene una forma arbitraria cualquiera, como la de la figura, entonces el espectro de la señal muestreada será también como el que aparece en la figura. Sabemos que el filtrado paso de baja de la señal muestreada nos recupera el primero de los lóbulos, aquél que corresponde al término para n = 0.

$$X_0(\omega) = K_0 F(\omega - 0\omega_s) = \frac{\tau}{T_s} F(\omega); \qquad K_0 = \frac{\tau}{T_s} Sa\left(\frac{0\pi\tau}{T_s}\right) = \frac{\tau}{T_s}$$





El efecto del espectro de fase con pendiente de valor -β es equivalente a un retardo de β segundos. Por lo tanto, si no nos importa que la señal se retrase, β puede tomar cualquier valor, pues no altera a la forma de la señal. Si por el contrario queremos garantizar que no haya retrasos entonces debe hacerse β = 0.

Por otra parte, si el filtro tiene una amplificación de valor K, el espectro de la señal recuperada será igual al primer lóbulo multiplicado por K.

$$G(\omega) = X_0(\omega)K = \frac{K\tau}{T_s}F(\omega)$$

Para que la señal recuperada sea igual a la entrada sus espectros deben ser iguales, por lo que

$$\frac{K\tau}{T_s} = 1; \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{T_s}{\tau} = \frac{T}{\frac{T}{2}} = 2$$

b) Si la señal de muestreo sigue manteniendo el período pero no la forma, la expresión del espectro de la señal muestreada sigue siendo la misma

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n F(\omega - n\omega_s)$$

con la diferencia de que ahora los valores de K_n no se corresponden con los de una onda cuadrada sino que tendrán valores arbitrarios. Eso hace que la forma del espectro de la señal muestreada sea ahora como el de la figura.

No obstante, también aquí es posible recuperar la señal original ya que, al filtrar, nos vamos a quedar con el primer lóbulo

$$X_0(\omega) = K_0 F(\omega - 0\omega_s) = K_0 F(\omega);$$

donde ahora K_0 no tiene un valor determinado. La señal recuperada será

$$G(\omega) = X_0(\omega)K = KK_0F(\omega)$$

La señal recuperada tiene la misma forma que la original f(t) con una amplificación de valor $K \cdot K_0$. Si se desea que la señal recuperada sea igual en amplitud a la señal original, sólo hay que ajustar la ganancia del filtro de forma que

$$K = \frac{1}{K_0}$$

siendo K_0 la componente de continua del espectro de P(t).