

Problema PTC0001-07

Determinar la mínima velocidad de muestreo necesaria para digitalizar y reconstruir correctamente la señal

$$x(t) = \frac{\text{sen}(6280 \cdot t)}{6280 \cdot t}$$

Solución PTC0001-07

La mínima velocidad de muestreo necesaria será el doble de la frecuencia de la componente espectral de máxima frecuencia de la señal. Por lo tanto lo que procede realizar en primer lugar es el cálculo del espectro de la señal original, al que denominaremos $X(\omega)$. Pero para ello, en vez de aplicar la expresión de la transformada de Fourier y operar sin más, podemos utilizar un camino más simple que consiste en aplicar una de las propiedades de dicha transformada. En efecto, la señal temporal $x(t)$ tiene la forma de una función Sample. Esta función Sample es, por otra parte, la transformada de un pulso cuadrado centrado en el origen. En efecto, consideremos un pulso cuadrado $g(t)$ de amplitud A y ancho d , cuyo espectro sabemos que vale

$$G(\omega) = Sa\left(\frac{\omega \cdot d}{2}\right)$$

La función original se puede escribir de la forma

$$x(t) = Sa(6280 \cdot t)$$

por lo que ambas funciones, una en el dominio temporal y la otra en el frecuencial, tienen la misma forma siempre que $d = 2 \cdot 6280$, es decir, que en esas condiciones se puede escribir

$$x(t) = G(t)$$

Por las propiedades de las transformadas de Fourier sabemos que si una función temporal $f(t)$ se transforma en $F(\omega)$, otra función temporal de la forma $F(t)$, se transforma en la función frecuencial $2 \cdot \pi \cdot f(-\omega)$. Por tanto $X(\omega)$, la transformada de la señal original, será también la transformada de $G(t)$, es decir,

$$X(\omega) = 2 \cdot \pi \cdot g(-\omega)$$

Recordamos que la función $g(t)$ es un pulso cuadrado de ancho d centrado en el origen (de tiempos). Es pues una función simétrica. Por tanto $g(-\omega)$ es igual a $g(\omega)$ y el espectro de la señal original queda como

$$X(\omega) = 2 \cdot \pi \cdot g(\omega)$$

Es decir, el espectro de la señal original será un pulso cuadrado centrado en el origen (de frecuencias), de amplitud $2\pi A$ y de ancho $d = 2 \cdot 6280$. Las unidades de d serán las mismas que las de la constante "6280". Al no indicarse nada en el enunciado vamos a suponer que se expresa en el sistema internacional, es decir, radianes/seg. Esto supone que la frecuencia máxima de la señal original es de 6280 rad/seg o su equivalente 1KHz., y que, por tanto, la mínima velocidad de muestreo debe ser el doble, es decir, 2KHz.

Aunque el resultado numérico sería el mismo, es un grave error decir que, como la frecuencia de la señal es de 1KHz, debe ser muestreada al doble.