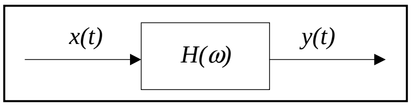
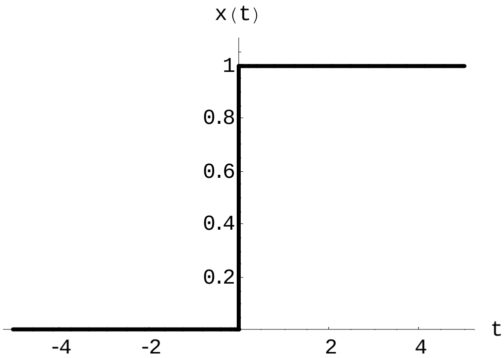
Problema PTC0002-05

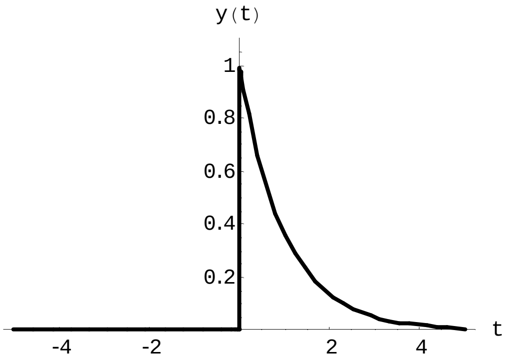
Se sabe que un sistema determinado produce una salida *y(t)* cuando se le excita con una entrada *x(t)*. Determinar y dibujar su función de transferencia *H(ω)*. ¿Qué tipo de función realiza el sistema?

$$\left.\begin{array}{ll} x(t)=0; & t<0 \\ x(t)=1; & t\geq 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{ll} y(t)=0; & t<0 \\ y(t)=e^{-at}; & t\geq 0 \end{array}\right\}$$



Solución PTC0002-05





La entrada *x(t)* es una función escalón unitario, usualmente denotada como *u(t)*. Por otra parte la salida es una función exponencial en el semieje positivo, es decir, una exponencial multiplicada por un escalón unitario

$$x(t)=u(t); \quad y(t)=e^{-at}u(t)$$

Las transformadas de ambas funciones son ampliamente conocidas y aparecen referidas y demostradas en cualquier manual básico sobre la materia. Estas transformadas son:

$$X(\omega)=\pi\cdot\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

$$Y(\omega)=\frac{1}{a+j\omega}$$

Por tanto, la función de transferencia será

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{\dfrac{1}{a+j\omega}}{\pi\cdot\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}}=\frac{\dfrac{1}{a+j\omega}}{\dfrac{j\pi\omega\cdot\delta(\omega)+1}{j\omega}}=\frac{j\omega}{a+j\omega}\cdot\frac{1}{j\pi\omega\cdot\delta(\omega)+1}$$

En el segundo factor de *H(ω)* aparece la función *δ(ω)* (delta de Dirac), pero en este caso multiplicada por *ω*. Sabemos que, en general, para cualquier función *f(x)*, se cumple que

$$f(x)\cdot\delta(x)=f(0)\cdot\delta(x)$$

ya que la función $\delta(x)$ vale 0 para cualquier valor de x, excepto en el origen. Sin embargo, en el caso de que $f(x)=x$, ocurre que $f(0)=0$, con lo cual, en el origen, se produce la indeterminación

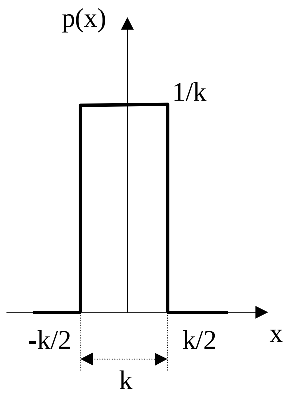
$$x \cdot \delta(x) = 0 \cdot \delta(x) = 0 \cdot \infty$$

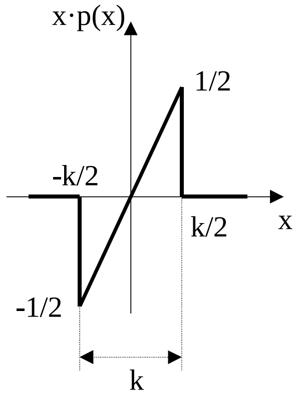
Para resolver esa indeterminación vamos a fijarnos en la definición de la función $\delta(x)$

$$\delta(x) \equiv \lim_{k \to 0} p(x)$$

en la que $p(x)$ es un pulso centrado en el origen de ancho k y alto $1/k$, con lo que su área (su integral) es la unidad. En el caso que nos ocupa tenemos

$$x \cdot \delta(x) = x \cdot \lim_{k \to 0} p(x) = \lim_{k \to 0} x \cdot p(x)$$





Pero ahora, la nueva función $x \cdot p(x)$ vale 0 fuera del intervalo $(-k/2,k/2)$, y dentro de dicho intervalo vale x/k, es decir, es una recta que pasa por el origen y cuyos extremos son $(-k/2)/k=-1/2$ y $(k/2)/k=+1/2$. Por tanto, podemos ver que, con independencia del valor de k, la función $x \cdot p(x)$ vale 0 en el origen y por tanto su límite cuando k tienda a 0, será también 0:

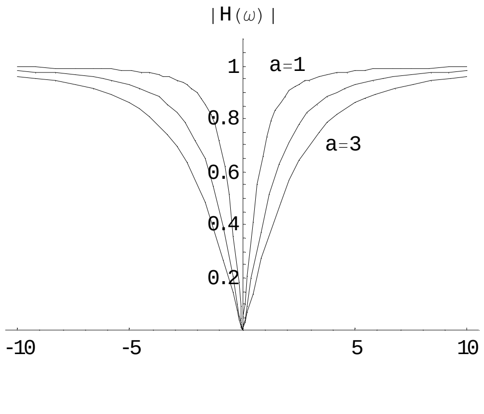
$$x \cdot \delta(x) = x \cdot \lim_{k \to 0} p(x) = \lim_{k \to 0} x \cdot p(x) = 0$$

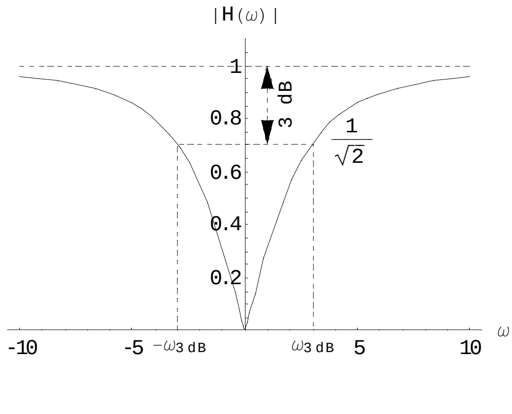
Sabiendo pues que $\omega \cdot \delta(\omega)=0$, podemos volver a la expresión de $H(\omega)$ y escribir

$$H(\omega) = \frac{j\omega}{a + j\omega} \cdot \frac{1}{j\pi\omega \cdot \delta(\omega) + 1} = \frac{j\omega}{a + j\omega}$$

El espectro de amplitud será

$$|H(\omega)| = \left| \frac{j\omega}{a + j\omega} \right| = \frac{\omega}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$





En una de las gráficas se representa el espectro de amplitud para distintos valores del parámetro *a*. En la otra gráfica se representa el espectro de amplitud para *a=3*, señalándose el valor de ω de 3dB. Dicho valor se calcula como

$$|H(\omega_{3dB})| = \frac{\omega_{3dB}}{\sqrt{a^2 + \omega_{3dB}^{\;2}}} = 3dB = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

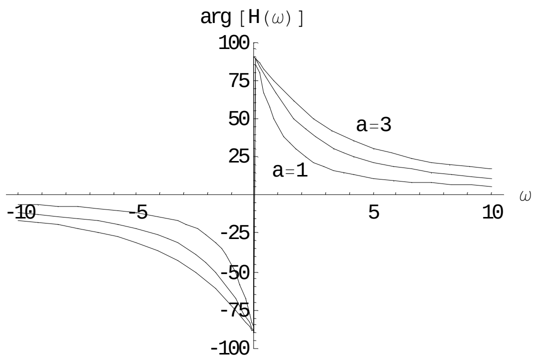
$$\frac{\omega_{3dB}^{\;2}}{a^2 + \omega_{3dB}^{\;2}} = \frac{1}{2}; \qquad 2 \cdot \omega_{3dB}^{\;2} = a^2 + \omega_{3dB}^{\;2}; \qquad \omega_{3dB}^{\;2} = a^2$$

$$\boxed{\omega_{3dB} = a}$$

El espectro de fase será

$$\arg[H(\omega)] = \arg\left[\frac{j\omega}{a + j\omega}\right] = \arg\left[\frac{j\omega(a - j\omega)}{(a + j\omega)(a - j\omega)}\right] = \arg\left[\frac{\omega^2 + ja\omega}{a^2 + \omega^2}\right]$$

$$\arg[H(\omega)] = \text{arctg}\left[\frac{\dfrac{a\omega}{a^2 + \omega^2}}{\dfrac{\omega^2}{a^2 + \omega^2}}\right] = \text{arctg}\left[\frac{a}{\omega}\right]$$



Como se puede comprobar, el sistema deja pasar las componentes de alta frecuencia y elimina las de baja frecuencia: es, por tanto, un **filtro paso de alta**.