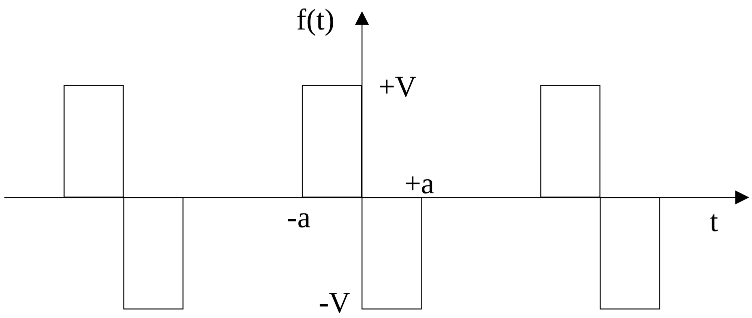
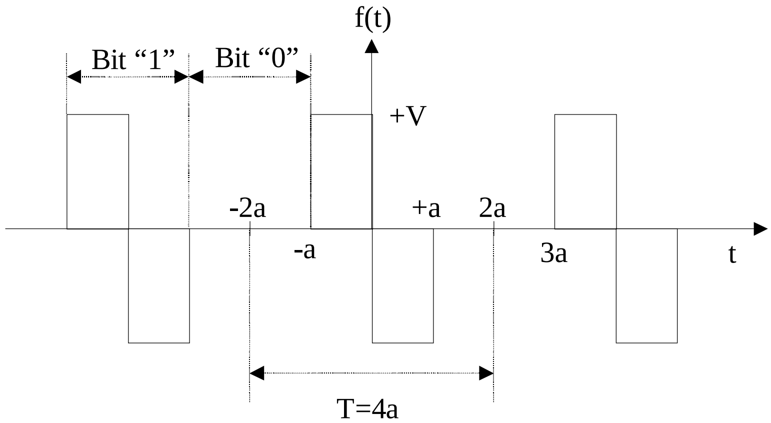
Problema PTC0003-01

En un determinado sistema de comunicaciones, los unos se transmiten como un pulso positivo (ancho *a* y altura *+V*), seguido de un pulso negativo (ancho *a* y altura *-V*); mientras que los ceros se transmiten como ausencia total de pulsos. El mensaje *M* está formado por una secuencia alternada de unos y ceros.

a) Calcular y dibujar los espectros de amplitud y fase de la señal correspondiente.
b) Comparar razonadamente la conveniencia de usar este sistema frente al NRZ polar para comunicación a través de canales telefónicos.



Solución PTC0003-01



Apartado a)

Como podemos ver, la función es periódica de período *T=4a*, por lo que su espectro tendrá un número discreto de componentes que habrá que obtener del desarrollo en serie de Fourier de una función periódica. Dicho desarrollo toma la siguiente forma

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}; \qquad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$

y los coeficientes c_n que definen el espectro se calculan como

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot e^{-j\omega_n t}dt = \int_{-2a}^{2a} f(t)\cdot e^{-j\omega_n t}dt = \int_{-a}^{0} Ve^{-j\omega_n t}dt - \int_{0}^{a} Ve^{-j\omega_n t}dt$$

$$c_n = \frac{V}{-j\omega_n}\left[e^{-j\omega_n t}\right]_{-a}^{0} - \frac{V}{-j\omega_n}\left[e^{-j\omega_n t}\right]_{0}^{a} = \frac{-V}{j\omega_n}\left[e^{-j\omega_n 0} - e^{j\omega_n a}\right] + \frac{V}{j\omega_n}\left[e^{-j\omega_n a} - e^{-j\omega_n 0}\right]$$

$$c_n = \frac{-V}{j\omega_n}\left(e^{-j\omega_n\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\right)} - e^{j\omega_n\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)}\right) + \frac{V}{j\omega_n}\left(e^{-j\omega_n\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)} - e^{-j\omega_n\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\right)}\right)$$

$$c_n = \frac{-V}{j\omega_n}\left(e^{-j\omega_n\frac{a}{2}}e^{j\omega_n\frac{a}{2}} - e^{j\omega_n\frac{a}{2}}e^{j\omega_n\frac{a}{2}}\right) + \frac{V}{j\omega_n}\left(e^{-j\omega_n\frac{a}{2}}e^{-j\omega_n\frac{a}{2}} - e^{-j\omega_n\frac{a}{2}}e^{j\omega_n\frac{a}{2}}\right)$$

$$c_n = \frac{-V}{j\omega_n}e^{j\omega_n\frac{a}{2}}\left(e^{-j\omega_n\frac{a}{2}} - e^{j\omega_n\frac{a}{2}}\right) + \frac{V}{j\omega_n}e^{-j\omega_n\frac{a}{2}}\left(e^{-j\omega_n\frac{a}{2}} - e^{j\omega_n\frac{a}{2}}\right)$$

$$c_n = \frac{V}{j\omega_n}e^{j\omega_n\frac{a}{2}}\left(e^{j\omega_n\frac{a}{2}} - e^{-j\omega_n\frac{a}{2}}\right) - \frac{V}{j\omega_n}e^{-j\omega_n\frac{a}{2}}\left(e^{j\omega_n\frac{a}{2}} - e^{-j\omega_n\frac{a}{2}}\right)$$

$$c_n = \frac{V}{j\omega_n}\left(e^{j\omega_n\frac{a}{2}} - e^{-j\omega_n\frac{a}{2}}\right)\left(e^{j\omega_n\frac{a}{2}} - e^{-j\omega_n\frac{a}{2}}\right)$$

Recordando que

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

y multiplicando y dividiendo por *2j*, tenemos

$$c_n = \frac{V}{j\omega_n}\frac{\left(e^{j\omega_n\frac{a}{2}} - e^{-j\omega_n\frac{a}{2}}\right)}{2j}2j\frac{\left(e^{j\omega_n\frac{a}{2}} - e^{-j\omega_n\frac{a}{2}}\right)}{2j}2j$$

$$c_n = \frac{j4V}{\omega_n}\operatorname{sen}\left(\omega_n\frac{a}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\omega_n\frac{a}{2}\right)$$

Recordando ahora que la función de muestreo se define como

$$Sa(x) \equiv \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

podemos escribir

$$c_n = \frac{j4V}{\omega_n}\frac{\operatorname{sen}\left(\omega_n\frac{a}{2}\right)}{\omega_n\frac{a}{2}}\omega_n\frac{a}{2}\frac{\operatorname{sen}\left(\omega_n\frac{a}{2}\right)}{\omega_n\frac{a}{2}}\omega_n\frac{a}{2}$$

$$\boxed{c_n = jVa^2\omega_n Sa^2\left(\omega_n\frac{a}{2}\right)}$$

El espectro de amplitud será pues

$$\left|c_n\right| = Va^2\omega_n Sa^2\left(\omega_n\frac{a}{2}\right)$$

y el espectro de fase, al ser c_n un número complejo sólo con componente imaginaria,

$$\arg\left[c_n\right] = \frac{\pi}{2}$$

El espectro de amplitud estará compuesto por una serie discreta (no continua) de sumandos cuya envolvente será la función

$$\left|c_n\right| = Va^2\omega Sa^2\left(\omega\frac{a}{2}\right)$$

El espectro de amplitud se anulará para $\omega_n=0$ y para

$$Sa\left(\omega_c\frac{a}{2}\right) = 0;$$

$$\omega_c\frac{a}{2} = k\pi; \qquad k = 1,2,3,...$$

$$\omega_c = \frac{2k\pi}{a}; \qquad k = 1,2,3,...$$

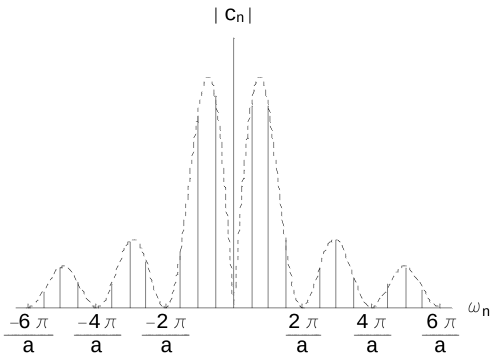
$$\frac{2\pi n_c}{T}\frac{a}{2} = k\pi; \qquad \frac{2\pi n_c}{4a}\frac{a}{2} = k\pi$$

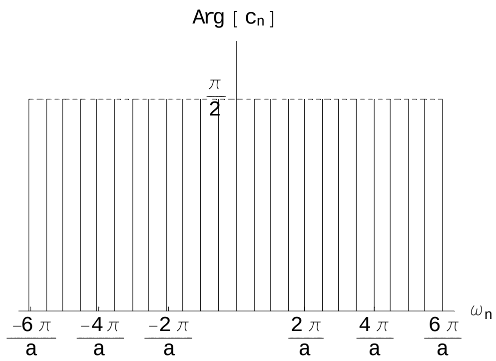
$$\frac{n_c}{4} = k$$

$$n_c = 4k; \qquad k = 1,2,3,...$$

Es decir que, además del componente de orden cero, se anularán también los componentes de orden 4, 8, 12, etc. La separación entre dos componentes espectrales consecutivos será

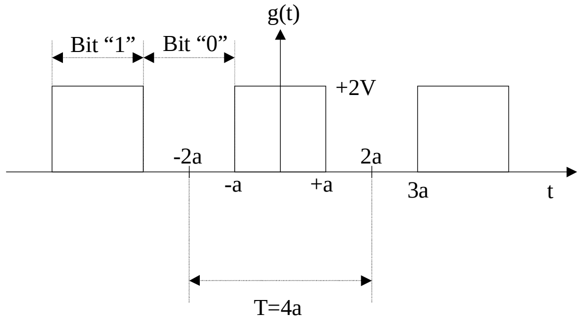
$$\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi(n+1)}{T} - \frac{2\pi n}{T} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4a} = \frac{\pi}{2a}$$





Apartado b)

Una codificación NRZ polar utiliza una tensión positiva *+2V* para el *1* lógico y una tensión nula para el *0* lógico, de tal forma que, para la misma velocidad de transmisión, la señal resultante *g(t)* es como la de la figura.



La representación espectral de dicha función es

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cdot e^{-j\omega_n t} dt = \int_{-a}^{a} 2V \cdot e^{-j\omega_n t} dt = \frac{2V}{-j\omega_n}\left[e^{-j\omega_n t}\right]_{-a}^{a} = \frac{-2V}{j\omega_n}\left[e^{-j\omega_n a} - e^{j\omega_n a}\right]$$

$$c_n = \frac{2V}{j\omega_n}\frac{\left[e^{j\omega_n a} - e^{-j\omega_n a}\right]}{2j}2j = \frac{4V}{\omega_n}\frac{\operatorname{sen}(\omega_n a)}{\omega_n a}\omega_n a$$

$$c_n = 4Va \cdot Sa(\omega_n a)$$

El espectro de amplitud se anulará para

$$Sa(\omega_c a) = 0;$$

$$\omega_c a = k\pi; \qquad k = 1,2,3,...$$

$$\omega_c = \frac{k\pi}{a}; \qquad k = 1,2,3,...$$

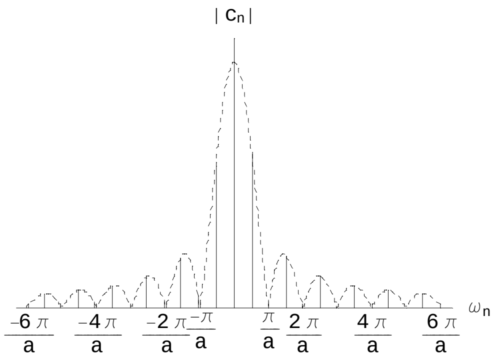
$$\frac{2\pi n_c}{T} a = k\pi; \qquad \frac{2\pi n_c}{4a} a = k\pi$$

$$\frac{n_c}{2} = k$$

$$n_c = 2k; \qquad k = 1,2,3,...$$

Es decir que se anularán los componentes de orden 2, 4, 6, etc. La separación entre dos componentes espectrales consecutivos será

$$\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi(n+1)}{T} - \frac{2\pi n}{T} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4a} = \frac{\pi}{2a}$$



Como se puede ver, el espectro de amplitud de la señal NRZ polar tiene una componente de continua significativa. Los canales telefónicos presentan un ancho de banda, típicamente, entre 300 y 3400 Hz. Ello implica que la componente de continua de la señal resultará filtrada y, por tanto, la señal quedará significativamente alterada. Por el contrario, en la señal propuesta no existe esa componente de continua y, por tanto, no se produce la alteración al atravesar el canal telefónico.