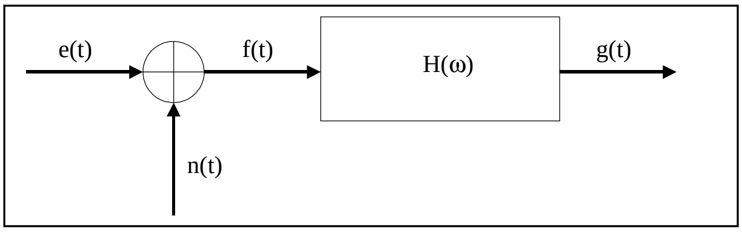
Problema PTC0003-04

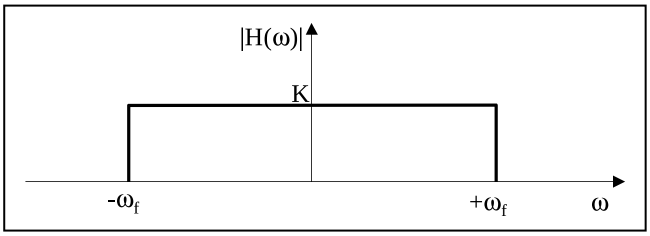
Una tensión senoidal $e(t) = A \cdot \cos(\omega_c t)$ se inyecta a un canal en el que se le añade un ruido aditivo y blanco de amplitud espectral *N(ω)=B*. La salida del canal se hace pasar por un filtro paso de baja, cuyo punto de corte es $\omega_f > \omega_c$.

a) ¿Qué unidades tendrá *B* en el sistema internacional?
b) Calcular las relaciones señal-ruido mínima y máxima en decibelios, así como los instantes en los que se producen.
c) Particularizarlo para *A=10 Volt.*; ω_c*= 1000 rad/seg*; ω_f*=2000 rad/seg*; y $B=10^{-3}$ en las correspondientes unidades.

Solución PTC0003-04

El enunciado de este problema supone una simplificación de lo que debería ser una forma de estudio más completa. En efecto, el decir que el ruido tiene una representación espectral de amplitud es suponer que *n(t)* se comporta como una señal cualquiera de carácter determinista. En estas circunstancias la resolución del problema es la que se dará a continuación. Sin embargo, en un análisis más completo habría que tener en cuenta que el ruido *n(t)* es una señal aleatoria que no se puede representar con un simple espectro de amplitud *N(ω)*, sino que debe ser representada por su función de densidad espectral de potencia $G_n(\omega)$ que se corresponde con la transformada de la función de autocorrelación $R_n(\tau)$ ligada al ruido aleatorio *n(t)*. Procederemos a continuación a la resolución del problema atendiendo a la simplificación planteada en el enunciado.





Apartado a.

N(ω) es la representación espectral de un ruido que se añade a una señal de tensión. Por tanto, la representación temporal del ruido, *n(t)*, tendrá dimensiones de tensión eléctrica (voltios). Hagamos un análisis dimensional de *N(ω)* considerando su relación con *n(t)*

$$N(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Si representamos por [*x*] las unidades de la magnitud *x*, podemos escribir

$$\left[N(\omega)\right] = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} n(t) \cdot e^{-j\omega t} dt\right]$$

Si tenemos en cuenta que una integral no es más que una suma de infinitos términos, y que la dimensión de una suma es la de cada uno de sus sumandos (deben sumarse magnitudes de la mismas unidades)

$$[N(\omega)] = [n(t) \cdot e^{-j\omega t} dt] = [n(t)] \cdot [e^{j\omega t}] \cdot [dt]$$

En esa expresión vemos que *n(t)* es una tensión eléctrica y que, por tanto sus unidades en el Sistema Internacional son [*voltios*]; y que *dt* es un diferencial de tiempo, por lo que sus unidades en el Sistema Internacional son [*segundos*]. Por otra parte

$$[e^{-j\omega t}] = [\cos(\omega t) - j \cdot \mathrm{sen}(\omega t)] = 1$$

ya que las funciones trigonométricas son adimensionales. Sustituyendo todo ello nos queda que

$$[B] = [N(\omega)] = [voltios] \cdot [segundos]$$

Apartado b.

Como puede verse en las figuras, a la señal *e(t)* se le suma un ruido *n(t)* para dar una señal ruidosa que denominaremos *f(t)*. Esta señal se hace pasar por un filtro paso de baja con función de transferencia $H(\omega)$, obteniéndose una señal final *g(t)*. Esta señal está constituida por la excitación original *e(t)* (la parte de ella resultante después del filtrado), y por una parte del ruido *n(t)*. En el dominio espectral tenemos que

$$G(\omega) = F(\omega) \cdot H(\omega) = (E(\omega) + N(\omega)) \cdot H(\omega) = E(\omega) \cdot H(\omega) + N(\omega) \cdot H(\omega)$$

Dada la condición de que $\omega_f > \omega_c$ vemos que el filtro no afecta a la señal original, por lo que tenemos que

$$E(\omega) \cdot H(\omega) = E(\omega)$$

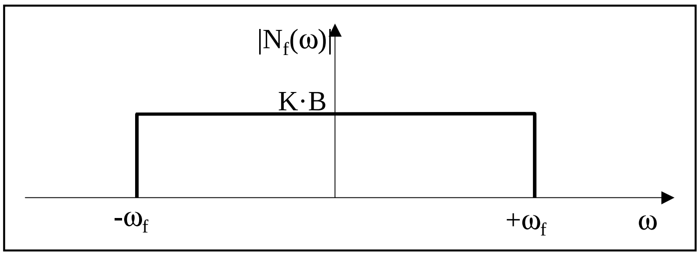
$$G(\omega) = E(\omega) + N(\omega) \cdot H(\omega)$$

es decir, que la señal resultante a la salida del filtro está compuesta de la señal original *e(t)* y de un ruido filtrado que denominaremos $n_f(t)$.

$$N_f(\omega) = N(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$G(\omega) = E(\omega) + N_f(\omega)$$

El ruido filtrado $N_f(\omega)$ valdrá $K{\cdot}B$ hasta ω_f, y 0 para frecuencias mayores.



Habitualmente la relación señal ruido *SNR* se define como la relación entre las potencias medias de la señal *e(t)* y del ruido $n_f(t)$. Estas potencias medias no dependen del tiempo, por lo que no podría hablarse de valores máximos y mínimos de la *SNR*, y de los instantes en que se produce. Por tanto, hay que interpretar el enunciado de este apartado en el sentido de que la *SNR* se define en función de los valores instantáneos de la señal y del ruido. Por tanto,

$$SNR(t) \equiv \frac{e^2(t)}{n_f^2(t)} = \left(\frac{e(t)}{n_f(t)}\right)^2$$

Nos vemos pues obligados a calcular la expresión del ruido filtrado $n_f(t)$. Para ello tenemos que

$$n_f(t) = \mathscr{F}^{-1}\left[N_f(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} N_f(\omega)\cdot e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$n_f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_f}^{+\omega_f} B\cdot e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{B}{2\pi jt}\left[e^{j\omega t}\right]_{-\omega_f}^{+\omega_f} = \frac{B}{2\pi jt}\left[e^{jt\omega_f} - e^{-jt\omega_f}\right]$$

$$n_f(t) = \frac{B}{\pi\, t}\frac{\left[e^{jt\omega_f} - e^{-jt\omega_f}\right]}{2j} = \frac{B}{\pi\, t}\operatorname{sen}\left(\omega_f t\right) = \frac{B\omega_f}{\pi}\frac{\operatorname{sen}\left(\omega_f t\right)}{\omega_f t}$$

$$n_f(t) = \frac{B\omega_f}{\pi}Sa\left(\omega_f t\right)$$

Sustituyendo ahora esta expresión en la correspondiente a la de la relación señal ruido tenemos que

$$SNR(t) = \left(\frac{e(t)}{n_f(t)}\right)^2 = \left(\frac{A\cdot\cos\left(\omega_c t\right)}{\frac{B\omega_f}{\pi}Sa\left(\omega_f t\right)}\right)^2 = \left(\frac{\pi\; A\cdot\cos\left(\omega_c t\right)}{B\omega_f\, Sa\left(\omega_f t\right)}\right)^2$$

Dado que las frecuencias ω_f y ω_c no están relacionadas, el valor mínimo del *SNR(t)* será *0* (-∞ dB), y se producirá cuando se anule el numerador, es decir, cuando

$$\cos\left(\omega_c t\right) = 0$$

$$\omega_c t = \frac{\pi}{2},\quad \frac{3\pi}{2},\quad \frac{5\pi}{2},\quad \frac{7\pi}{2},\quad \cdots$$

$$\omega_c t = (2n-1)\frac{\pi}{2};\quad n = 1,\,2,\,3,\cdots$$

$$t = (2n-1)\frac{\pi}{2\omega_c};\quad n = 1,\,2,\,3,\cdots$$

De análoga forma, el valor máximo del *SNR(t)* será ∞ (∞ dB), y se producirá cuando se anule el denominador, es decir, cuando

$$Sa\left(\omega_f t\right) = 0$$

$$\operatorname{sen}\left(\omega_f t\right) = 0$$

$$\omega_f t = 0,\quad \pi,\quad 2\pi,\quad 3\pi,\quad \cdots$$

$$\omega_f t = n\pi;\quad n = 1,\,2,\,3,\cdots$$

$$t = \frac{n\pi}{\omega_f};\quad n = 1,\,2,\,3,\cdots$$

Nótese que, en el caso en el que los valores de las frecuencias ω_f y ω_c hiciesen que, en algún instante, se anulasen simultáneamente el numerador y el denominador, el resultado no es sólo una indeterminación matemática (*0/0*), sino también una indeterminación de tipo físico ya que implica la ausencia simultánea de señal y de ruido, por lo que la *SNR* carece de sentido en dicho instante.

Apartado c.

Para ω_c*= 1000 rad/seg*, el valor mínimo de la *SNR* sigue siendo -∞ dB, lo que se produce para

$$t = (2n-1)\frac{\pi}{2 \cdot 1000} seg; \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

Para ω_f= *2000 rad/seg*, el valor máximo de la *SNR* sigue siendo $+\infty$ dB, lo que se produce para

$$t = \frac{n\pi}{2000} seg; \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$