Problema PTC0003-07

Considere una señal *f(t)* de ancho de banda *B* con espectro de amplitud plano de valor unitario y espectro de fase nulo. La señal atraviesa un sistema que la eleva al cuadrado.

a) Determine el espectro de la señal de salida.
b) Determine las expresiones temporales de la entrada y la salida
c) Determine la función de transferencia del sistema, comentando el efecto que el sistema produce en el espectro de salida.

Solución PTC0003-07

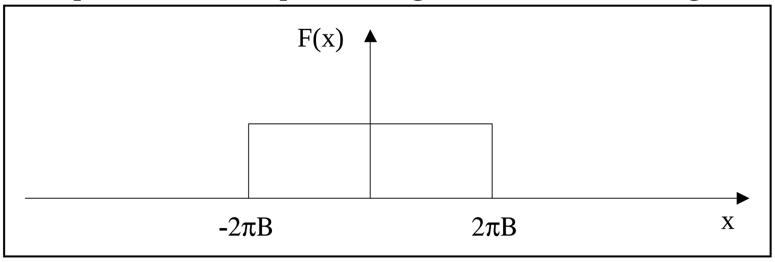
Apartado a). El sistema “elevador al cuadrado” transforma la señal *f(t)* en otra señal *g(t)* tal que $g(t) = f^2(t)$. Como disponemos del espectro de la señal de entrada, *F(ω)*, para obtener el espectro de la señal de salida, *G(ω)*, podríamos obtener *f(t)*, elevar al cuadrado para determinar *g(t)* y, mediante la transformada de Fourier, obtener finalmente el valor de *G(ω)*. No obstante, podemos también aprovechar las propiedades de las transformadas y escribir que

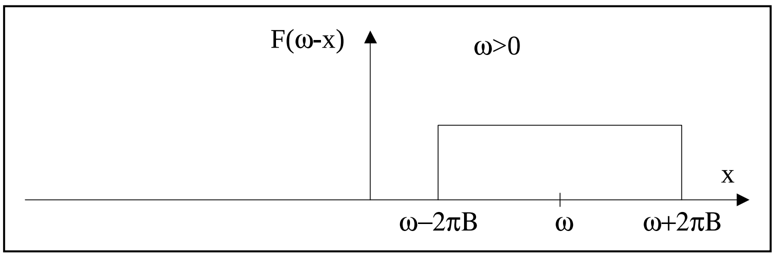
$$G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)] = \mathcal{F}\left[f^2(t)\right] = \mathcal{F}\left[f(t)\cdot f(t)\right] = \frac{1}{2\pi}F(\omega) * F(\omega)$$

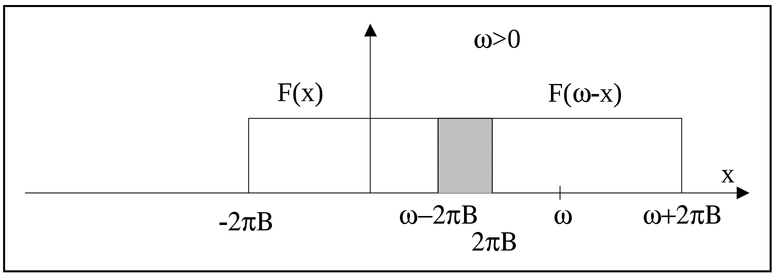
expresión en la que aparece el producto de convolución del espectro de entrada que se define como

$$F(\omega) * F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cdot F(\omega - x)\cdot dx$$

Las funciones correspondientes se representan gráficamente como sigue:







Teniendo en cuenta que el espectro de entrada es de valor unitario, el valor de la integral para un determinado valor de ω es el área rayada en el dibujo. Con ello el producto de convolución queda

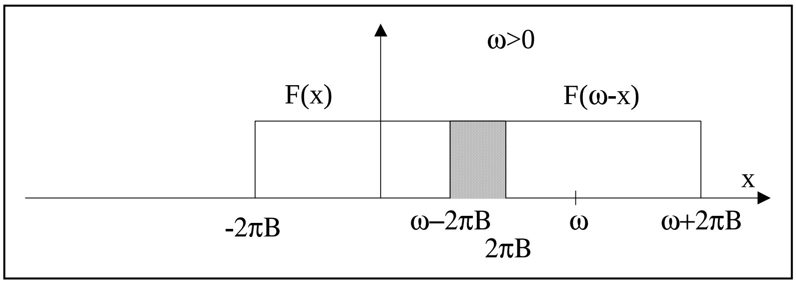
$$F(\omega) * F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cdot F(\omega - x)\cdot dx = \int_{\omega-2\pi B}^{2\pi B} F(x)\cdot F(\omega - x)\cdot dx = \int_{\omega-2\pi B}^{2\pi B} 1\cdot 1\cdot dx = [x]_{\omega-2\pi B}^{2\pi B}$$

$$F(\omega) * F(\omega) = [(2\pi B) - (\omega - 2\pi B)] = 4\pi B - \omega$$

Y, por tanto, el espectro de salida vale

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * F(\omega) = \frac{1}{2\pi}(4\pi B - \omega) = 2B - \frac{\omega}{2\pi}$$

Este espectro de salida ha sido calculado para valores positivos de ω. En el caso de valores negativos de ω el gráfico sobre el producto de convolución toma la forma siguiente.



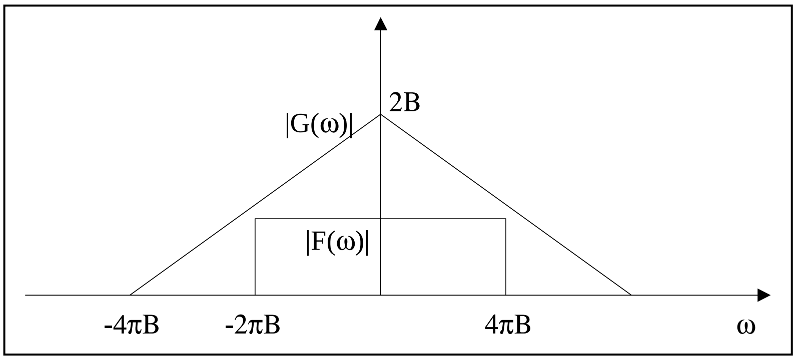
En este caso podemos escribir

$$F(\omega) * F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cdot F(\omega - x)\cdot dx = \int_{-2\pi B}^{\omega+2\pi B} F(x)\cdot F(\omega - x)\cdot dx = \int_{-2\pi B}^{\omega+2\pi B} 1\cdot 1\cdot dx = [x]_{-2\pi B}^{\omega+2\pi B}$$

$$F(\omega) * F(\omega) = [(\omega + 2\pi B) - (-2\pi B)] = 4\pi B + \omega$$

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * F(\omega) = \frac{1}{2\pi}(4\pi B + \omega) = 2B + \frac{\omega}{2\pi}$$

Con estos resultados podemos dibujar el espectro de la señal de salida que toma la forma de la figura siguiente:



Apartado b). Para determinar la expresión temporal de las señales de entrada y salida no hay más que calcular las transformadas inversas de los espectros. En concreto para la entrada tenemos

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\cdot e^{j\omega t}\cdot d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi B}^{2\pi B}1\cdot e^{j\omega t}\cdot d\omega=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{jt}\left[e^{j\omega t}\right]_{-2\pi B}^{2\pi B}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi jt}\left[e^{j2\pi Bt}-e^{-j2\pi Bt}\right]\frac{2j}{2j}=\frac{1}{\pi t}\operatorname{sen}(2\pi Bt)\frac{2\pi Bt}{2\pi Bt}=2B\cdot Sa(2\pi Bt)$$

Para la representación espectral de la salida tenemos que

$$g(t)=f^2(t)=\left[2B\cdot Sa(2\pi Bt)\right]^2=4B^2\cdot Sa^2(2\pi Bt)$$

Apartado c). El sistema es claramente no lineal por lo que no tiene función de transferencia. El efecto más notable que produce en la salida es que duplica el ancho de banda. Es decir, debido a las no linealidades, aparecen en la salida componentes espectrales (armónicos), que no existían en la entrada. Este comportamiento de “creación” de armónicos es típico de los sistemas no lineales.