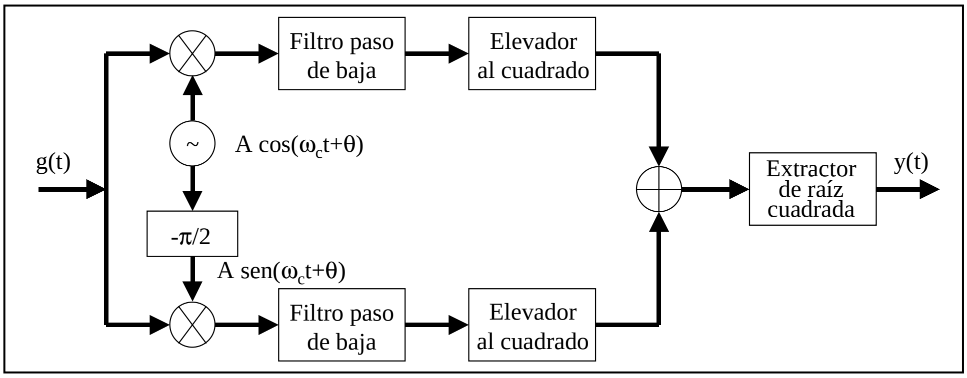
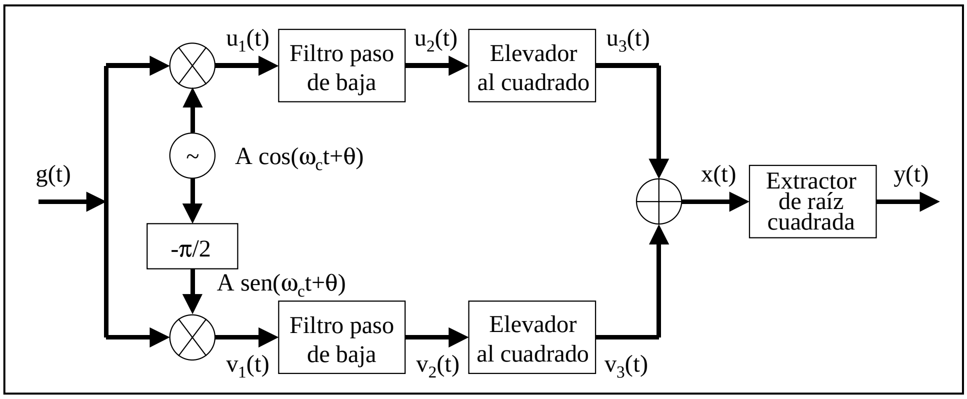
Problema PTC0003-08

Demuestre que el circuito de la figura actúa como detector de envolvente para una señal AM, limitada en banda, del tipo

$$g(t) = K[1 + m \cdot f(t)] \cdot \cos\omega_c t$$



Solución PTC0003-08



Tomemos como referencia la nomenclatura del circuito de la figura. En él la señal $u_1(t)$ toma el siguiente valor:

$$u_1(t) = g(t) \cdot A \cdot \cos(\omega_c t + \theta) = A \cdot K[1 + m \cdot f(t)] \cdot \cos\omega_c t \cdot \cos(\omega_c t + \theta)$$

Recordemos algunas expresiones trigonométricas

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \cos a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$$

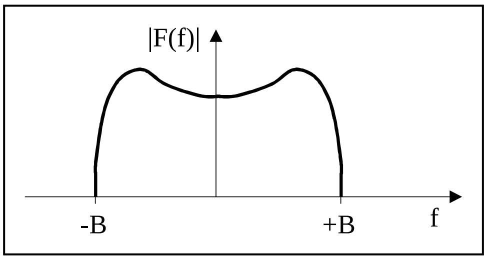
Con ello tenemos que

$$u_1(t) = A \cdot K[1 + m \cdot f(t)] \cdot \cos\omega_c t \cdot (\cos\omega_c t \cdot \cos\theta - \operatorname{sen}\omega_c t \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

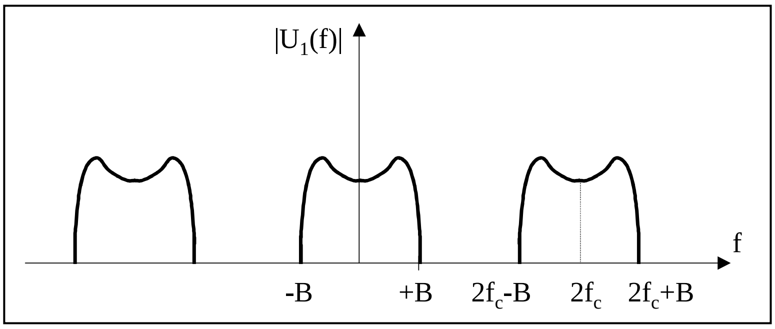
$$u_1(t) = A \cdot K[1 + m \cdot f(t)] \cdot (\cos\theta \cdot \cos^2\omega_c t - \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\omega_c t \cdot \cos\omega_c t)$$

$$u_1(t) = \frac{A \cdot K}{2}[1 + m \cdot f(t)] \cdot (\cos\theta + \cos\theta \cdot \cos 2\omega_c t - \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen} 2\omega_c t)$$

En esta expresión podemos distinguir 3 términos. El primero se corresponde a la señal en banda base que tiene un ancho de banda finito, al que denominaremos B. Su espectro podemos representarlo de la siguiente forma



Los otros dos términos de la expresión son modulaciones en AM con una portadora de frecuencia f_c. El espectro total correspondiente a los 3 términos será pues



Si a esta señal le aplicamos un filtrado paso de bajas eliminamos el segundo y tercer término de la expresión anterior y, a la salida del filtro, la señal que nos queda es

$$u_2(t) = \frac{A \cdot K}{2}[1 + m \cdot f(t)] \cdot \cos\theta$$

Por último, el circuito de elevación al cuadrado produce a su salida la señal

$$u_3(t) = \frac{A^2 \cdot K^2}{4}[1 + m \cdot f(t)]^2 \cdot \cos^2\theta$$

Si consideramos ahora la rama inferior del circuito, las señales que se obtienen son las siguientes:

$$v_1(t) = A \cdot K[1 + m \cdot f(t)]\cos\omega_c t \cdot \mathrm{sen}(\omega_c t + \theta)$$

$$v_1(t) = A \cdot K[1 + m \cdot f(t)] \cdot \cos\omega_c t \cdot (\mathrm{sen}\,\omega_c t \cdot \cos\theta + \cos\omega_c t \cdot \mathrm{sen}\,\theta)$$

$$v_1(t) = A \cdot K[1 + m \cdot f(t)] \cdot (\cos\theta \cdot \mathrm{sen}\,\omega_c t \cdot \cos\omega_c t + \mathrm{sen}\,\theta \cdot \cos^2\omega_c t)$$

$$v_1(t) = \frac{A \cdot K}{2}[1 + m \cdot f(t)] \cdot (\cos\theta \cdot \mathrm{sen}\,2\omega_c t + \mathrm{sen}\,\theta + \mathrm{sen}\,\theta \cdot \cos 2\omega_c t)$$

Por análogo razonamiento al del caso anterior, al filtrar paso de baja esta señal se eliminan el primer y tercer términos, por lo que el resultado es

$$v_2(t) = \frac{A \cdot K}{2}[1 + m \cdot f(t)] \cdot \mathrm{sen}\,\theta$$

Por último, el circuito de elevación al cuadrado produce a su salida la señal

$$v_3(t) = \frac{A^2 \cdot K^2}{4}[1 + m \cdot f(t)]^2 \cdot \mathrm{sen}^2\theta$$

Combinando las dos ramas del circuito obtenemos

$$x(t) = u_3(t) + v_3(t) = \frac{A^2 \cdot K^2}{4}[1 + m \cdot f(t)]^2 \cdot \cos^2\theta + \frac{A^2 \cdot K^2}{4}[1 + m \cdot f(t)]^2 \cdot \mathrm{sen}^2\theta$$

$$x(t) = \frac{A^2 \cdot K^2}{4}\left[1 + m \cdot f(t)\right]^2 \cdot \left(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right)$$

$$x(t) = \frac{A^2 \cdot K^2}{4}\left[1 + m \cdot f(t)\right]^2$$

Finalmente el circuito de extracción de la raíz cuadrada nos ofrece a la salida la señal

$$y(t) = \frac{A \cdot K}{2}\left[1 + m \cdot f(t)\right]$$

Esta señal es, como puede verse comparándola con la expresión de *g(t)*, la envolvente de la señal AM a partir de la cual es inmediata la obtención de la señal modulante *f(t)*.