Problema PTC0003-09

Una portadora de 10 MHz se modula en fase con una señal sinusoidal de 10 kHz, y amplitud unitaria. La desviación máxima de fase es de 1 radián para la amplitud unitaria de la señal modulante.

a) Calcular el ancho de banda aproximado de la señal PM.
b) Si la frecuencia de la señal modulante cambia a 5 kHz, encontrar el nuevo ancho de banda de la señal PM.
c) Si la frecuencia es la original (10 kHz), pero la amplitud se duplica, encontrar el ancho de banda de la señal PM.

Solución PTC0003-09

Apartado a)

Aunque no tenemos expresión directa para calcular el ancho de banda de una señal PM, sabemos determinar fácilmente el ancho de banda de señales FM. En este último caso el ancho de banda sería

$$B = 2\, n_s\ f_m$$

siendo n_s el número de componentes significativas del espectro de la señal FM (función del índice de modulación β) y f_m la frecuencia máxima de la señal modulante.

Pero sabemos que las señales FM y PM están fuertemente relacionadas, pues ambas son modulaciones angulares. En efecto, si consideramos una señal con modulación angular como

$$g(t) = A\cos\theta(t)$$

en la que

$$\theta(t) = \omega\, t + \theta_0$$

en el caso de modular en fase (PM) con una señal modulante $f_1(t)$ tenemos que

$$\theta(t) = \omega_c\, t + \theta_0 + k_1\ f_1(t)$$

mientras que en el caso de modular en frecuencia (FM) con una señal modulante $f_2(t)$ tenemos que

$$\omega(t) = \omega_c + k_2\ f_2(t)$$

Por definición de pulsación angular instantánea sabemos que

$$\omega(t) \equiv \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Por tanto en el caso de modular en fase (PM) con una señal modulante $f_1(t)$ tenemos que

$$\omega(t) \equiv \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + k_1\,\frac{df_1(t)}{dt}$$

Vemos pues que modular en fase con $f_1(t)$ es lo mismo que modular en frecuencia con la derivada de $f_1(t)$. Estudiemos pues este caso del que sí podemos obtener su ancho de banda.

Sabemos que el ancho de banda es

$$B = 2\, n_s\ f_m$$

expresión en la que f_m es la frecuencia más alta de la señal modulante, en este caso la derivada de $f_1(t)$. Como $f_1(t)$ es una sinusoide de amplitud unitaria tenemos que

$$f_1(t) = \operatorname{sen}\omega_m\, t$$

su derivada será

$$\frac{df_1(t)}{dt} = \omega_m \cos \omega_m t$$

Vemos pues que la señal modulante en FM es también de tipo sinusoidal y su máxima (y única) frecuencia es f_m, 10 kHz. Para calcular el número de componentes significativas de la señal FM debemos calcular el índice de modulación β, definido como

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$$

De la expresión anterior

$$\omega(t) \equiv \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + k_1 \frac{df_1(t)}{dt}$$

deducimos que la desviación de pulsación angular es

$$\Delta\omega = k_1 \left[\frac{df_1(t)}{dt} \right]_{max}$$

y por tanto

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} k_1 \left[\frac{df_1(t)}{dt} \right]_{max}$$

En nuestro caso, como

$$\frac{df_1(t)}{dt} = \omega_m \cos \omega_m t$$

tenemos que

$$\left[\frac{df_1(t)}{dt} \right]_{max} = \omega_m$$

por lo que

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi} k_1 \, \omega_m = k_1 \, f_m$$

Para calcular la constante k_1 tenemos que recurrir de nuevo a la modulación en fase y observar que

$$\theta(t) = \omega_c \, t + \theta_0 + k_1 \, f_1(t)$$

por lo que la desviación de fase será

$$\Delta\theta = k_1 \left[f_1(t) \right]_{max}$$

Dado que

$$f_1(t) = \text{sen}\, \omega_m t$$

tenemos que

$$\left[f_1(t) \right]_{max} = 1$$

y, por tanto,

$$\Delta\theta = k_1$$

En nuestro caso, se afirma en el enunciado que la desviación de fase es de 1 radián por lo que ese es el valor de la constante k_1 que buscamos.

$$k_1 = 1\, rad$$

lo que, sustituyendo, nos da

$$\Delta f = k_1 \, f_m = 1\, rad \cdot 10\, kHz = 10\, kHz$$

y, por tanto,

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{10\,kHz}{10\,kHz} = 1$$

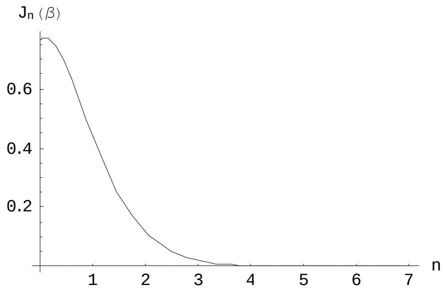
De acuerdo con la tabla de valores y la gráfica de las funciones de Bessel para un valor de β igual a 1, vemos que podemos considerar que el número de componentes significativos de la señal es

$$n_s = 3$$

por lo que el ancho de banda de la señal PM será, finalmente,

$$B = 2\,n_s\ f_m = 2 \cdot 3 \cdot 10\ kHz = 60\,kHz$$

n	$J_n(\beta)$; β=1
0	0.765
1	0.440
2	0.115
3	0.020
4	0.002
5	-



Apartado b)

En el caso en el que la frecuencia de la señal modulante es 5 kHz, tenemos que

$$\Delta f = k_1\ f_m = 1\,rad \cdot 5\,kHz = 5\,kHz$$

y, por tanto,

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{5\,kHz}{5\,kHz} = 1$$

por lo que de nuevo

$$n_s = 3$$

y el ancho de banda de la señal PM será, en este caso,

$$B = 2\,n_s\ f_m = 2 \cdot 3 \cdot 5\ kHz = 30\,kHz$$

Apartado c)

Si se duplica la amplitud de la señal modulante tenemos que

$$f_1(t) = 2\,\mathrm{sen}\,\omega_m\, t$$

por lo que

$$\left[f_1(t)\right]_{max} = 2$$

y, por tanto,

$$k_1 = 2\,rad$$

lo que, sustituyendo, nos da

$$\Delta f = k_1\ f_m = 2\,rad \cdot 10\,kHz = 20\,kHz$$

y, por tanto,

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{20\,kHz}{10\,kHz} = 2$$

De acuerdo con la tabla de valores y la gráfica de las funciones de Bessel para un valor de β igual a 2, vemos que podemos considerar que el número de componentes significativos de la señal es

$$n_s = 5$$

por lo que el ancho de banda de la señal PM será, finalmente,

$$B = 2\,n_s\ f_m = 2 \cdot 5 \cdot 10\ kHz = 100\,kHz$$

n	**$J_n(\beta)$**; β=2
0	0.224
1	0.577
2	0.353
3	0.129
4	0.034
5	0.007
6	0.001
7	-