Problema PTC0003-12
Calcular las transformadas de Fourier de las siguientes funciones:

a) Impulso unitario: *δ(t)*
b) Constante: *1*
c) Exponencial en semieje positivo: $e^{-at}\, u(t)$
d) Escalón unitario: *u(t)*
e) Vibración cosenoidal: $\cos \omega_o t$
f) Vibración senoidal: $\text{sen}\ \omega_o t$

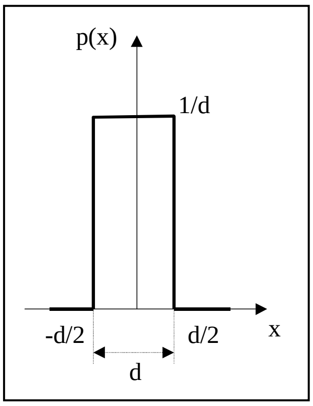
Solución PTC0003-12

a) Impulso unitario: *δ(t)*

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} \delta(t)\, e^{-j\omega 0} dt = \int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} \delta(t)\, dt$$

que no es sino el área ocupada por la señal *δ(t)* que, por definición, vale 1. Por tanto,

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$$



Otra forma de abordar el problema es acudir a la definición de la función impulso, como límite de otra función. Así, por ejemplo, puede plantearse que la función impulso unitario es el límite de una función rectangular como la de la figura:

$$\delta(x) = \lim_{d \to 0} p(x)$$

Por tanto la transformada de Fourier será

$$\mathcal{F}[p(t)] = P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$P(\omega) = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{1}{d} e^{-j\omega t} dt = \frac{-1}{d\, j\omega} \left[e^{-j\omega t} \right]_{-d/2}^{d/2}$$

$$P(\omega) = \frac{-1}{d\, j\omega} \left(e^{-j\omega \frac{d}{2}} - e^{j\omega \frac{d}{2}} \right) = \frac{1}{d\, j\omega} \frac{e^{j\omega \frac{d}{2}} - e^{-j\omega \frac{d}{2}}}{2j} 2j$$

$$P(\omega) = \frac{2}{\omega d} \text{sen}\left(\frac{\omega d}{2} \right) = \frac{2}{\omega d} \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega d}{2} \right)}{\frac{\omega d}{2}} \frac{\omega d}{2} = Sa\left(\frac{\omega d}{2} \right)$$

Con este resultado podemos escribir

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \mathcal{F}\left[\lim_{d \to 0} p(t) \right] = \lim_{d \to 0} \mathcal{F}[p(t)] = \lim_{d \to 0} P(\omega)$$

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \lim_{d \to 0} Sa\left(\frac{\omega d}{2} \right) = 1$$

b) Constante: *1*

$$\mathcal{F}[1] = \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{-j\omega t} dt = \frac{-1}{j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{-1}{j\omega}\left(e^{-j\omega\infty} - e^{j\omega\infty}\right)$$

$$\mathcal{F}[1] = \frac{-1}{j\omega}\left(e^{-j\omega\infty} - e^{j\omega\infty}\right) = \frac{1}{j\omega}\frac{e^{j\omega\infty} - e^{-j\omega\infty}}{2j}2j = \frac{2}{\omega}\mathrm{sen}(\omega\infty)$$

Esa expresión es indeterminada, pues no se sabe el seno de infinito. Vemos pues que no es posible determinar la transformada de forma directa. De acuerdo con las propiedades de la transformada, sabemos que si *f(t)* se transforma en *F(ω)*, entonces

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

Considerando $f(t) = \delta(t)$, tenemos que

$$f(t) = \delta(t) \leftrightarrow F(\omega) = 1$$

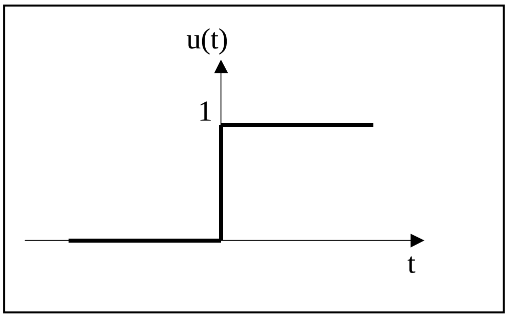
por lo que

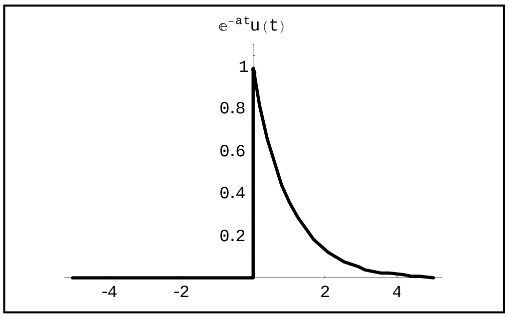
$$F(t) = 1 \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

y, finalmente obtenemos que

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$$

c) Exponencial en semieje positivo: e^{-at} *u(t)*





La función u(t) es la función escalón unitario, es decir, una función que cumple

$$\begin{cases} u(t) = 0 & \forall t < 0 \\ u(t) = 1 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Por tanto la función exponencial compleja e^{-at}, al multiplicarla por la función escalón unitario *u(t)*, toma valores únicamente en el semieje positivo. Con estos datos podemos calcular su transformada como

$$\mathcal{F}\left[e^{-at}u(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt$$

$$\mathcal{F}\left[e^{-at}u(t)\right] = \frac{-1}{a+j\omega}\left[e^{-(a+j\omega)t}\right]_{0}^{\infty} = \frac{-1}{a+j\omega}\left[e^{-\infty}e^{-j\infty} - e^{0}\right] = \frac{-1}{a+j\omega}\left[0-1\right]$$

y finalmente obtenemos

$$\mathcal{F}\left[e^{-at}u(t)\right] = \frac{1}{a+j\omega}$$

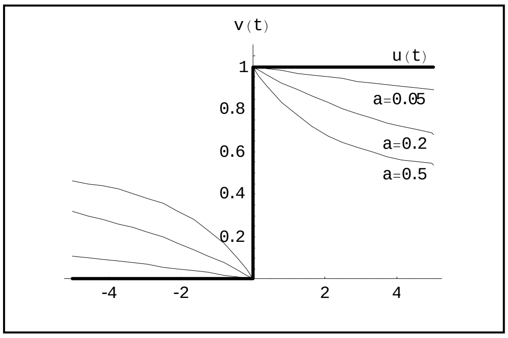
d) Escalón unitario: *u(t)*

Para la obtención de la transformada del escalón unitario podemos escribir

$$\mathcal{F}[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-j\omega t}dt = \frac{-1}{j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_0^{\infty} = \frac{-1}{j\omega}\left(e^{-j\omega\infty} - e^{j\omega 0}\right)$$

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{-1}{j\omega}\left(e^{-j\omega\infty} - 1\right) = \frac{-1}{j\omega}\left[\cos(\omega\infty) - j\,\mathrm{sen}(\omega\infty) - 1\right]$$

Esta expresión es indeterminada, al igual que en el caso de la transformada de una constante anteriormente analizado, pues no se conocen los valores del seno y del coseno de infinito. Vemos pues que no es posible determinar la transformada de forma directa.



Para solventar el problema nos ayudaremos de una función auxiliar *v(t)* de la forma

$$v(t) = \frac{1 + e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)}{2}$$

La función así definida, vemos que tiende a la función escalón unitario *u(t)* cuando el parámetro *a* de la exponencial tiende a cero. Es decir,

$$u(t) = \lim_{a\to 0} v(t)$$

En efecto, para valores de *t<0* tenemos que *u(t)=0* y *u(-t)=1*, por lo que

$$\lim_{a\to 0} v(t) = \lim_{a\to 0}\frac{1 + e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)}{2} = \lim_{a\to 0}\frac{1 + e^{-at}\cdot 0 - e^{at}\cdot 1}{2}$$

$$\lim_{a\to 0} v(t) = \frac{1 - \lim_{a\to 0} e^{at}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 = u(t)$$

Para valores de *t>0* tenemos que *u(t)=1* y *u(-t)=0*, por lo que

$$\lim_{a\to 0} v(t) = \lim_{a\to 0}\frac{1 + e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)}{2} = \lim_{a\to 0}\frac{1 + e^{-at}\cdot 1 - e^{at}\cdot 0}{2}$$

$$\lim_{a\to 0} v(t) = \frac{1 + \lim_{a\to 0} e^{-at}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 = u(t)$$

Basándonos ahora en la función auxiliar *v(t)* podemos calcular la transformada del escalón unitario como

$$\mathcal{F}[u(t)] = \mathcal{F}\left[\lim_{a\to 0} v(t)\right] = \lim_{a\to 0}\mathcal{F}[v(t)] = \lim_{a\to 0}\mathcal{F}\left[\frac{1 + e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)}{2}\right]$$

$$\mathcal{F}[u(t)] = \lim_{a\to 0}\left\{\mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\right] + \mathcal{F}\left[\frac{e^{-at}u(t)}{2}\right] + \mathcal{F}\left[\frac{-e^{at}u(-t)}{2}\right]\right\}$$

$$\mathcal{F}[u(t)] = \lim_{a\to 0}\frac{1}{2}\mathcal{F}[1] + \lim_{a\to 0}\frac{1}{2}\mathcal{F}\left[e^{-at}u(t)\right] - \lim_{a\to 0}\frac{1}{2}\mathcal{F}\left[e^{at}u(-t)\right]$$

La transformada que aparece en el primer sumando es ya conocida y vale

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$$

De igual forma, la transformada del segundo sumando ha sido ya calculada también y vale

$$\mathcal{F}\left[e^{-at}u(t)\right] = \frac{1}{a + j\omega}$$

Por último, para la transformada del tercer sumando tenemos

$$\mathcal{F}\left[e^{at}u(-t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{at}u(-t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{at}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{(a-j\omega)t}dt$$

$$\mathcal{F}\left[e^{at}u(-t)\right]=\frac{1}{a-j\omega}\left[e^{(a-j\omega)t}\right]_{-\infty}^{0}=\frac{1}{a-j\omega}\left[e^{0}-e^{-\infty}e^{j\infty}\right]=\frac{1}{a-j\omega}\left[1-0\right]$$

y finalmente obtenemos

$$\mathcal{F}\left[e^{-at}u(-t)\right]=\frac{1}{a-j\omega}$$

Sustituyendo estos valores tenemos

$$\mathcal{F}\left[u(t)\right]=\lim_{a\to 0}\frac{1}{2}2\pi\delta(\omega)+\lim_{a\to 0}\frac{1}{2}\frac{1}{a+j\omega}-\lim_{a\to 0}\frac{1}{2}\frac{1}{a-j\omega}$$

$$\mathcal{F}\left[u(t)\right]=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{2}\frac{1}{j\omega}-\frac{1}{2}\frac{1}{(-j\omega)}=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{2}\frac{1}{j\omega}+\frac{1}{2}\frac{1}{j\omega}$$

Con lo que, finalmente, obtenemos

$$\mathcal{F}\left[u(t)\right]=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

e) Vibración cosenoidal: *cos* $\omega_o t$

Para obtener la transformada escribimos

$$\mathcal{F}\left[\cos(\omega_0 t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega_0 t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}e^{-j\omega t}dt$$

$$\mathcal{F}\left[\cos(\omega_0 t)\right]=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt$$

$$\mathcal{F}\left[\cos(\omega_0 t)\right]=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\omega+\omega_0)t}dt$$

Si recordamos que

$$\mathcal{F}\left[1\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}dt=2\pi\delta(\omega)$$

tenemos entonces que

$$\mathcal{F}\left[\cos(\omega_0 t)\right]=\frac{1}{2}2\pi\delta(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}2\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

y finalmente

$$\mathcal{F}\left[\cos(\omega_0 t)\right]=\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

f) Vibración senoidal: *sen* $\omega_o t$

Para obtener la transformada escribimos

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{sen}(\omega_0 t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sen}(\omega_0 t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}e^{-j\omega t}dt$$

$$\mathcal{F}[\operatorname{sen}(\omega_0 t)] = \frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt - \frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathcal{F}[\operatorname{sen}(\omega_0 t)] = \frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt - \frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt$$

Si recordamos de nuevo que

$$\mathcal{F}[1] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$$

tenemos entonces que

$$\mathcal{F}[\operatorname{sen}(\omega_0 t)] = \frac{1}{2j} 2\pi\delta(\omega-\omega_0) - \frac{1}{2j} 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\mathcal{F}[\operatorname{sen}(\omega_0 t)] = -j\pi\delta(\omega-\omega_0) + j\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

y finalmente

$$\mathcal{F}[\operatorname{sen}(\omega_0 t)] = j\pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$$