Problema PTC0003-14

Demostrar que las siguientes transformadas de Fourier son correctas:

a) $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
b) $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$
c) $f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0}$
d) $f(t) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$
e) $\dfrac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega)$
f) $\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx \leftrightarrow \dfrac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$
g) $-jt f(t) \leftrightarrow \dfrac{dF(\omega)}{d\omega}$

Solución PTC0003-14

Apartado a)
Aplicando la definición de transformada tenemos

$$\mathcal{F}\left[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\right] e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathcal{F}\left[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} a_1 f_1(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} a_2 f_2(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathcal{F}\left[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\right] = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

Apartado b)
Sabemos que

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

En esta última integral podemos cambiar la variable de integración sin que por ello quede alterado el resultado. Así, si cambiamos ω por x, tenemos

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{jxt} dx$$

Con este resultado podemos ahora abordar la transformada de *F(t)*

$$\mathcal{F}\left[F(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt$$

Por el mismo criterio que anteriormente, podemos sustituir la variable de integración t por otra variable cualquiera, por ejemplo x, sin que se altere el resultado, con lo que la transformada queda como

$$\mathcal{F}\left[F(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-j\omega x} dx$$

Si comparamos esta integral con la que aparece en la primera expresión de este apartado comprobamos fácilmente que, como se quería demostrar,

$$\mathcal{F}[F(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-j\omega x} dx = 2\pi f(-\omega)$$

Apartado c)

$$\mathcal{F}[f(t-t_o)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_o) e^{-j\omega t} dt$$

Haciendo el cambio de variables

$$x = t - t_o; \quad dx = dt$$

nos queda

$$\mathcal{F}[f(t-t_o)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega(x+t_0)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} e^{-j\omega t_0} dx$$

$$\mathcal{F}[f(t-t_o)] = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx = e^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

Apartado d)

$$\mathcal{F}\left[f(t) e^{j\omega_0 t}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt = F(\omega - \omega_0)$$

Apartado e)

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Derivando ambos miembros con respecto a *t* nos queda

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Pero por otra parte

$$\frac{df(t)}{dt} = \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Comparando las dos últimas expresiones obtenemos que

$$G(\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega F(\omega)$$

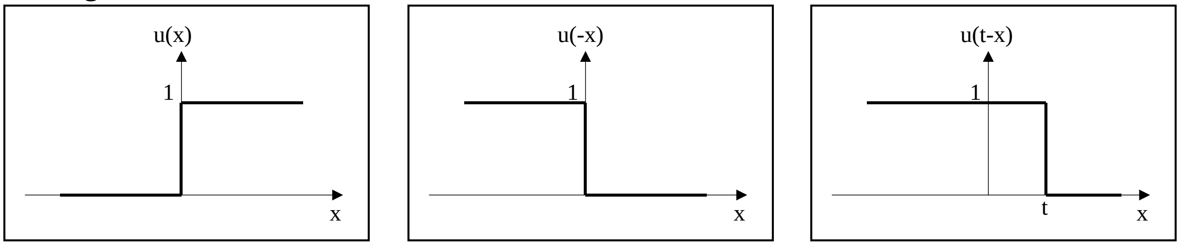
Apartado f)
Llamemos

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x) dx$$

En ese caso

$$G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)] = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(x) dx\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{t} f(x) dx\right] e^{-j\omega t} dt$$

Por otra parte podemos recordar que la función escalón unitario *u(x)* tiene la forma de las figuras



Por tanto, podemos escribir la última integral como

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)u(t-x)dx\right]e^{-j\omega t}dt$$

Permutando el orden de las integrales obtenemos

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)u(t-x)e^{-j\omega t}dt\right]dx$$

En esta expresión el término *f(x)* podemos sacarlo fuera de la integral más interna ya que depende de *x* y no de *t*, por lo que nos queda

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t-x)e^{-j\omega t}dt\right]dx$$

La integral más interna no es sino la transformada de la función escalón unitario desplazada en el tiempo por lo que, de acuerdo con los resultados del apartado c) podemos escribir

$$\mathcal{F}[u(t-x)] = U(\omega)e^{-j\omega x}$$

y sustituyendo en la anterior

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)U(\omega)e^{-j\omega x}dx$$

Cómo *U(ω)* no depende de *x* podemos sacarlo fuera de la integral.

$$G(\omega) = U(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx = U(\omega)F(\omega)$$

Pero sabemos que la transformada de Fourier del escalón unitario vale

$$U(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

por lo que sustituyendo obtenemos

$$G(\omega) = F(\omega)\left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right) = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(\omega)\delta(\omega)$$

En el segundo término aparece la función impulso que, como sabemos, vale cero en cualquier punto excepto en el origen. Por lo tanto, multiplicar por *F(ω)*, es lo mismo que multiplicar por *F(0)*, es decir, por el valor de *F(ω)* para *ω=0*. Con ello tenemos finalmente que

$$G(\omega) = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(x)dx\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

Apartado g)

$$\mathcal{F}\left[-jtf(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}-jtf(t)e^{-j\omega t}dt$$

Por otra parte, sabemos que por definición

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

Derivando con respecto a ω tenemos

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega}=\int_{-\infty}^{\infty}-jtf(t)e^{-j\omega t}dt$$

Comparando esta expresión con la primera de este apartado tenemos finalmente que

$$\mathcal{F}\left[-jtf(t)\right]=\frac{dF(\omega)}{d\omega}$$