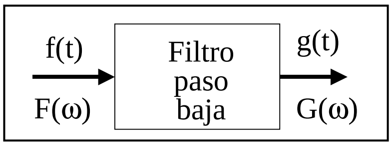
Problema PTC0003-17

Una señal cuadrada TTL de 1 KHz. se introduce en un canal que se comporta como un filtro paso de baja ideal, cuyo ancho de banda es B. Indicar que condición debe cumplir B para que la atenuación de la señal debida al filtrado sea inferior a 0.3 dB.



Solución PTC0003-17

Sean $\overline{P_f}$ y $\overline{P_g}$ las potencias medias de las señales de entrada y salida respectivamente. La atenuación de potencia expresada en decibelios es

$$10\log\frac{\overline{P_g}}{\overline{P_f}}$$

El filtrado hace que $\frac{\overline{P_g}}{\overline{P_f}} < 1$. Al tomar logaritmos, la atenuación es negativa. O sea,

$$10\log\frac{\overline{P_g}}{\overline{P_f}} < 0$$

La condición que nos permitirá hallar B es pues

$$10\log\frac{\overline{P_g}}{\overline{P_f}} \geq -0'3dB$$

Para evitar el uso de logaritmos:

$$10\log\frac{\overline{P_g}}{\overline{P_f}} \geq -0'3dB \Rightarrow \log\frac{\overline{P_g}}{\overline{P_f}} \geq -0'03B \Rightarrow \frac{\overline{P_g}}{\overline{P_f}} \geq 10^{-0'03}$$

$$\boxed{\frac{\overline{P_g}}{\overline{P_f}} \geq 0'9332543}$$

condición de la que nos serviremos posteriormente. Calculemos $\overline{P_f}$.

$$\overline{P_f} = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} A^2 dt = \frac{1}{T}A^2\frac{T}{2} = \frac{A^2}{2}$$

Calculemos ahora $\overline{P_g}$. El espectro de g(t) es el de f(t), al que se le eliminan los armónicos que el filtro no deja pasar. Como el filtro es ideal, los armónicos que pasan lo hacen completamente, sin atenuarse. Sea N el número de armónicos a partir del cual el filtro elimina señal. Entonces, la potencia de la señal de salida es:

$$\overline{P_g} = \sum_{n=-N}^{N} \frac{c_n^2}{T^2}$$

siendo los coeficientes c_n para una señal cuadrada un caso particular de los de una señal rectangular positiva de amplitud A y ancho d.

$$c_n = AdS_a\left(\omega_n \frac{d}{2}\right) \quad ; \qquad d = \frac{T}{2} \rightarrow c_n = \frac{AT}{2} S_a\left(\frac{2\pi}{T} n \frac{T}{2}\right) \rightarrow c_n = \frac{AT}{2} S_a\left(n \frac{\pi}{2}\right)$$

Luego, sustituyendo:

$$\overline{P_g} = \sum_{n=-N}^{N} \frac{A^2 T^2 S_a^2\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{4T^2} = \frac{A^2}{4} \sum_{n=-N}^{N} S_a^2\left(n \frac{\pi}{2}\right)$$

Con este resultado podemos escribir

$$\frac{\overline{P_g}}{\overline{P_f}} = \frac{\frac{A^2}{4} \sum_{n=-N}^{N} S_a^2\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{A^2}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^{N} S_a^2\left(n \frac{\pi}{2}\right)$$

Sabemos que

$$\frac{\overline{P_g}}{\overline{P_f}} = \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^{N} S_a^2\left(n \frac{\pi}{2}\right) \geq 0'9332543$$

de donde

$$\sum_{n=-N}^{N} S_a^2\left(n \frac{\pi}{2}\right) \geq 1'866508602$$

Construyendo una tabla de valores tenemos que

N	$S_a^2\left(n \frac{\pi}{2}\right)$	$\sum_{n=-N}^{N} S_a^2\left(n \frac{\pi}{2}\right)$
0	1	1
1	0’405284734	1’810569469
2	0	1’810569469
3	0’045031637	1’900632743

Vemos con ello que basta con considerar hasta el tercer armónico. Los demás pueden ser eliminados por el filtro. La frecuencia fundamental de la señal de entrada es 1 KHz. Luego, la frecuencia de corte o ancho de banda del filtro ha de ser al menos de 3·1 = 3 KHz. En definitiva

$$\boxed{B \geq 3 \text{ KHz}}$$