Problema PTC0003-19

Obtener el producto de la convolución de las siguientes funciones

$$f_1 = ae^{-at}u(t) \qquad f_2 = u(t)$$

Solución PTC0003-19

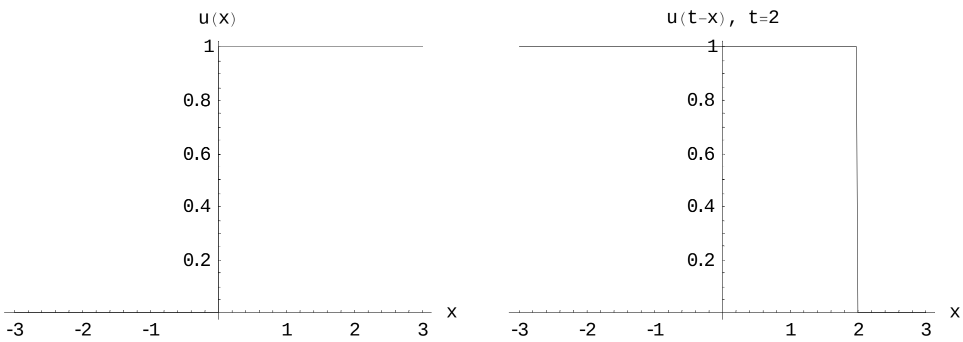
El producto de convolución de dos funciones se define como

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(t-x)\, dx$$

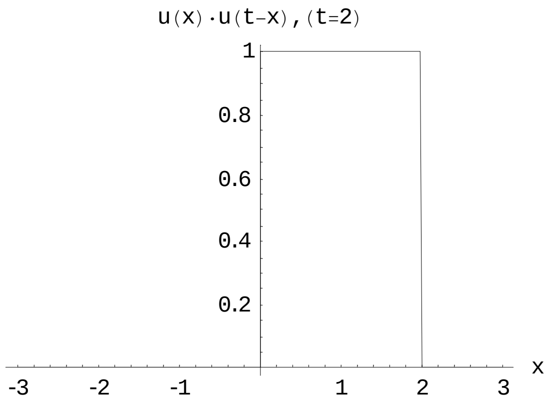
En nuestro caso la expresión anterior se convierte en

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ae^{-ax} u(x) \cdot u(t-x)\, dx$$

Gráficamente las funciones escalón unitario *u(x)* y *u(t-x)* son de la siguiente forma



El producto de *u(x)* y *u(t-x)* es:



que, como vemos, vale:

- Para t<0, siempre cero
- Para t>0, cero excepto en el intervalo *[0,t]* que vale *1*.

Por tanto el producto de convolución será, para t>0:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a e^{-ax} u(x) \cdot u(t-x)\, dx = \int_0^t a e^{-ax}\, dx$$

$$f_1(t) * f_2(t) = a \frac{1}{-a} \left[e^{-ax} \right]_0^t = -\left[e^{-at} - 1 \right] = \left(1 - e^{-at} \right)$$

Como, para t<0, el producto de convolución es cero, el resultado total, para cualquier t, puede expresarse como

$$f_1(t) * f_2(t) = \left(1 - e^{-at} \right) \cdot u(t)$$

que gráficamente se corresponde con