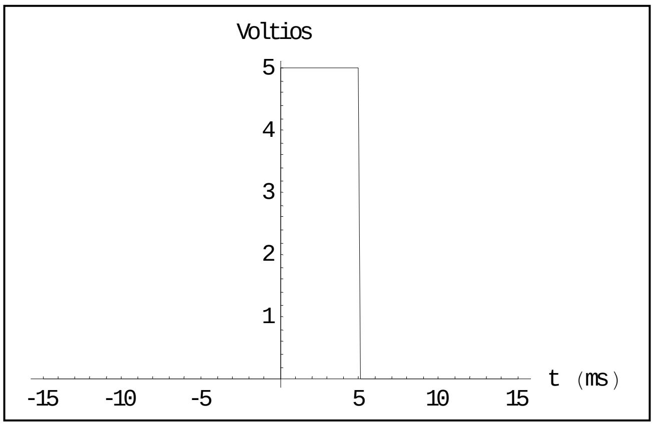
Problema PTC0003-21

Un pulso de 5 voltios de amplitud y 5 milisegundos de ancho, se hace pasar por un filtro paso de baja con frecuencia de corte de 3’5 KHz, a continuación por un muestreador de 8 kilomuestras por segundo y, por último, por un segundo filtro paso de baja con frecuencia de corte de 4 KHz. Determinar analítica y gráficamente el espectro a la salida de cada uno de los filtros y del muestreador.

Solución PTC0003-21

El sistema se compone de los siguientes bloques:

La señal de entrada *f(t)* es un pulso de alto A (5 voltios) y ancho *d* (5 ms) no centrado en el origen.



El espectro de la señal de entrada es

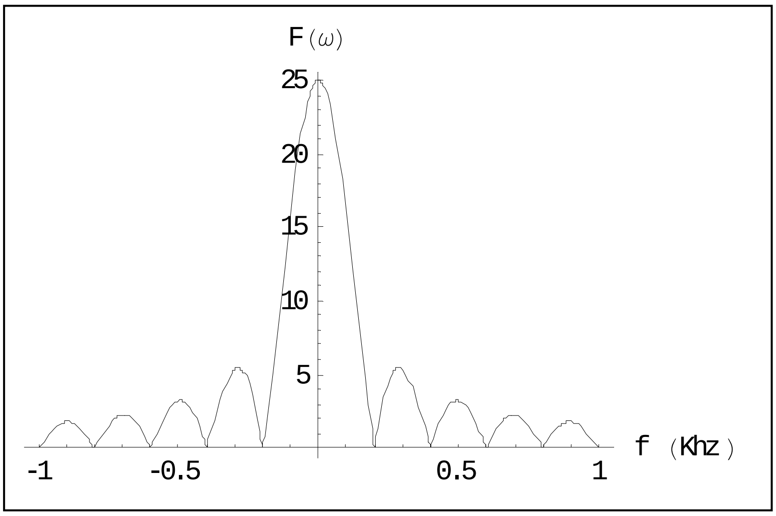
$$\mathrm{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = A\int_{0}^{d} e^{-j\omega t}dt = A\int_{0}^{d} e^{-j\omega t}dt = \frac{A}{-j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_0^d = -\frac{A}{j\omega}\left[e^{-j\omega d}-1\right]$$

$$\mathrm{F}(\omega)=-\frac{A}{j\omega}\left[e^{-j\omega\frac{d}{2}}e^{-j\omega\frac{d}{2}}-e^{-j\omega\frac{d}{2}}e^{j\omega\frac{d}{2}}\right]=-\frac{A}{j\omega}e^{-j\omega\frac{d}{2}}\left[e^{-j\omega\frac{d}{2}}-e^{j\omega\frac{d}{2}}\right]$$

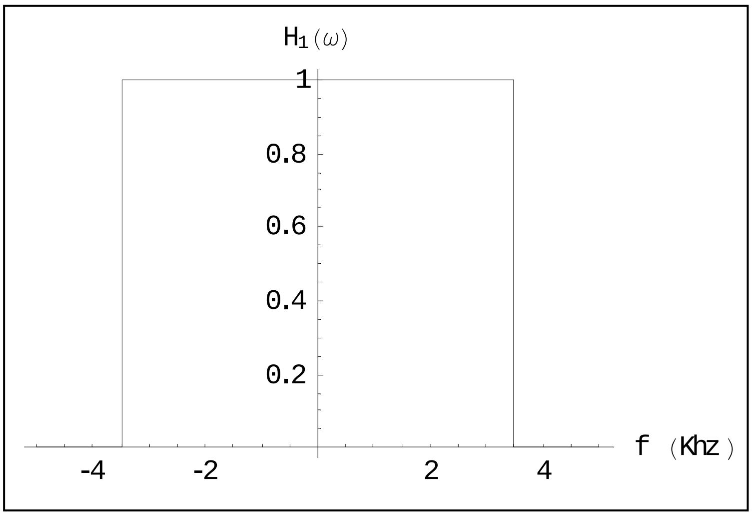
$$\mathrm{F}(\omega)=\frac{A}{j\omega}e^{-j\omega\frac{d}{2}}\frac{\left(e^{j\omega\frac{d}{2}}-e^{-j\omega\frac{d}{2}}\right)}{2j}2j=\frac{2A}{\omega}e^{-j\omega\frac{d}{2}}\frac{sen\left(\frac{\omega d}{2}\right)}{\frac{\omega d}{2}}\frac{\omega d}{2}$$

$$\mathrm{F}(\omega)=Ade^{-j\omega\frac{d}{2}}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega d}{2}\right)$$

Gráficamente, el espectro de amplitud de la señal de entrada es



El primer filtro paso de baja limita el ancho de banda de la señal original para asegurarnos que, al muestrearla, no existen componentes que puedan provocar el solape de los espectros. Suponemos que el filtro se comporta idealmente con una frecuencia de corte de 3’5 Khz. Su espectro es el siguiente:



El valor de $H_1(\omega)$ lo podemos expresar analíticamente como

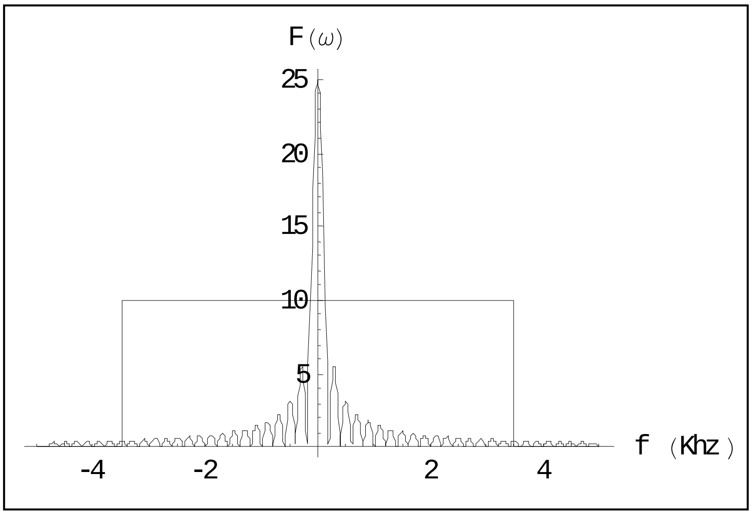
$$\begin{cases} \forall |\omega| \leq \omega_c & H_1(\omega) = 1 \\ \forall |\omega| > \omega_c & H_1(\omega) = 0 \end{cases}$$

El espectro $F_1(\omega)$ de la señal filtrada será, por tanto, analíticamente

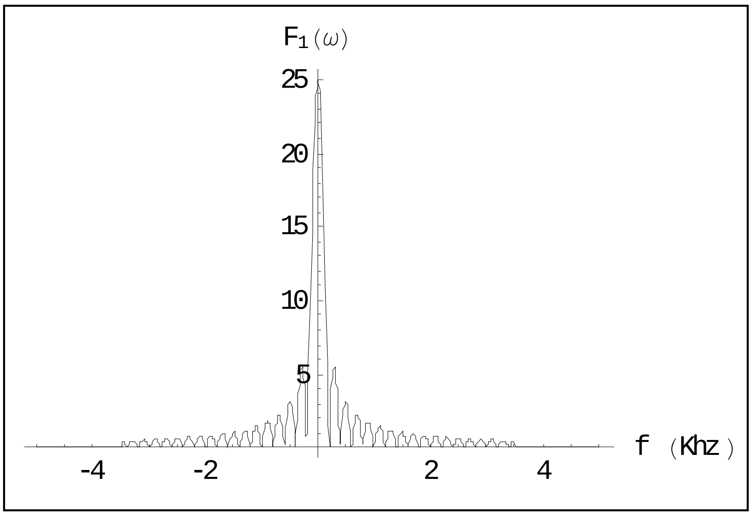
$$F_1(\omega) = F(\omega) \cdot H_1(\omega)$$

$$\begin{cases} \forall |\omega| \leq \omega_c & F_1(\omega) = Ade^{-j\omega\frac{d}{2}} \mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega d}{2}\right) \\ \forall |\omega| > \omega_c & F_1(\omega) = 0 \end{cases}$$

Si dibujamos simultáneamente el espectro del pulso de entrada y el del filtro (ampliado este último a efectos de mejor visualización), podemos observar el filtrado de la señal.



La representación gráfica del espectro de la señal filtrada es pues

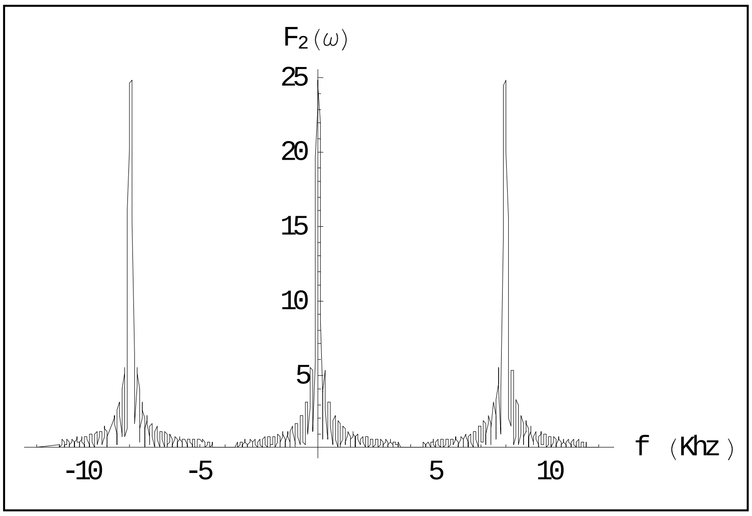


Podemos ver que, efectivamente, la señal filtrada no tiene componente por encima de los 4 Khz (de hecho ni por encima de los 3’5 Khz) lo que garantiza la condición de no solape al muestrearla a 8 Khz.

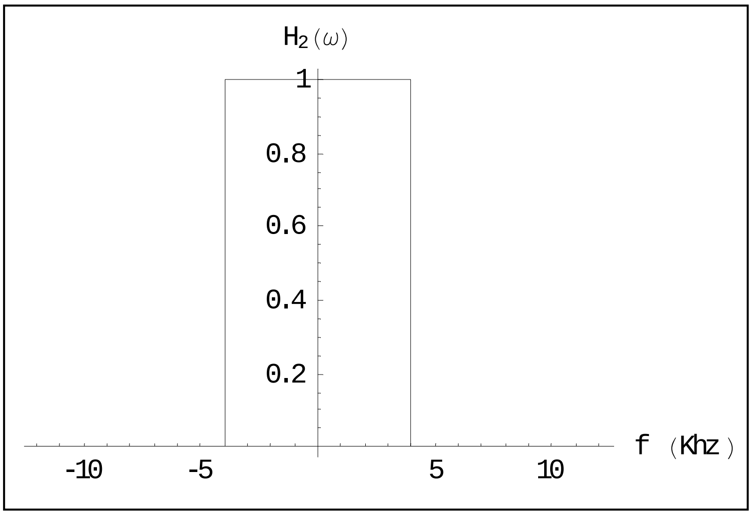
El siguiente paso del sistema lo constituye un muestreador. Si suponemos que el mismo tiene un comportamiento ideal (muestreo natural con ancho de pulso muy estrecho) podemos escribir

$$F_2(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_1(\omega - n\omega_s)$$

Este espectro tiene la siguiente representación gráfica



El segundo filtro paso de baja constituye un recuperador ya que trata de recuperar la señal original a partir de la señal muestreada. Suponemos que el recuperador se comporta idealmente con una frecuencia de corte de 4 Khz. Su espectro es el siguiente:



El valor de $H_2(\omega)$ lo podemos expresar analíticamente como

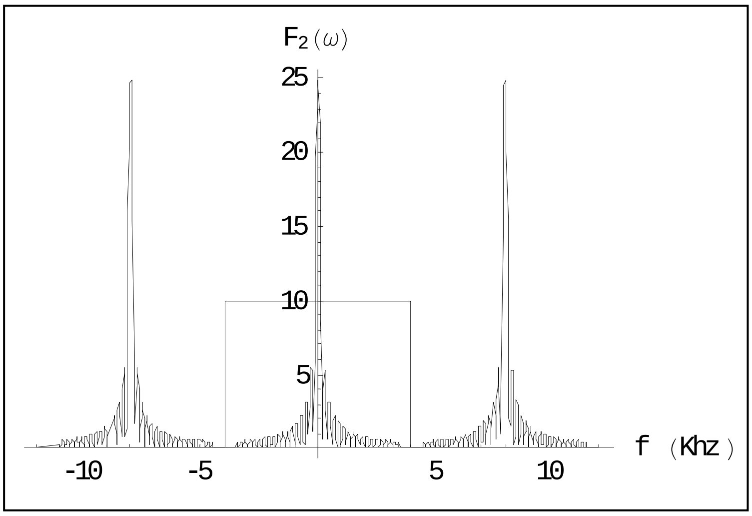
$$\begin{cases} \forall |\omega| \le \omega_{c2} & H_2(\omega) = 1 \\ \forall |\omega| > \omega_{c2} & H_2(\omega) = 0 \end{cases}$$

El espectro $F_3(\omega)$ de la señal recuperada será, por tanto, analíticamente

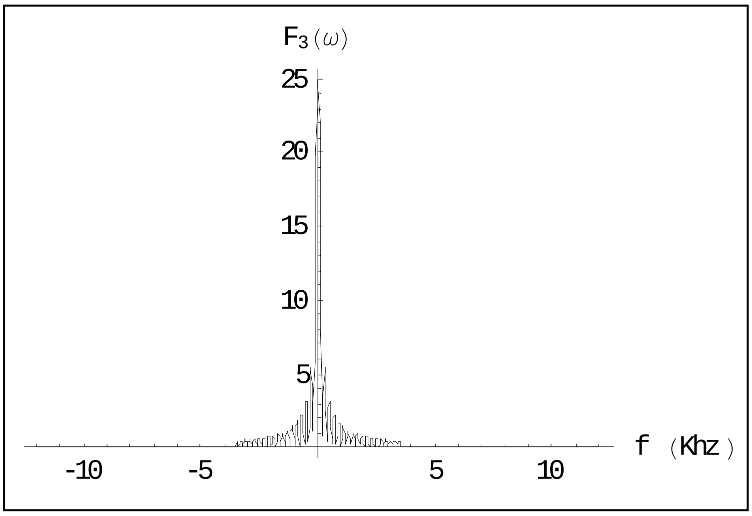
$$F_3(\omega) = F_2(\omega) \cdot H_2(\omega)$$

$$\begin{cases} \forall |\omega| \le \omega_{c2} & F_3(\omega) = F_2(\omega) \\ \forall |\omega| > \omega_{c2} & F_3(\omega) = 0 \end{cases}$$

Si dibujamos simultáneamente el espectro del pulso de entrada y el del recuperador (ampliado este último a efectos de mejor visualización), podemos observar el filtrado de la señal.



La representación gráfica del espectro de la señal filtrada es pues



Podemos ver que, efectivamente, el espectro de la señal recuperada $F_3(\omega)$ es exactamente igual a la de la señal antes del muestreo $F_1(\omega)$, aunque difiere ligeramente de la señal original $F(\omega)$.

Definitivamente la representación analítica de la señal $F_3(\omega)$ a la salida del sistema es

$$F_3(\omega) = F_1(\omega)$$

$$\begin{cases} \forall |\omega| \leq \omega_c & F_3(\omega) = Ade^{-j\omega\frac{d}{2}}\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega d}{2}\right) \\ \forall |\omega| > \omega_c & F_3(\omega) = 0 \end{cases}$$