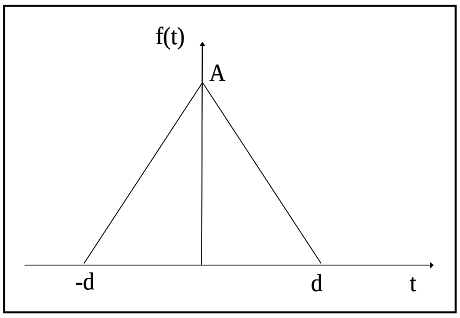
Problema PTC0003-22

Obtener la transformada de Fourier de un pulso triangular centrado en el origen de amplitud *0* a *A* y de ancho *2d*.

Solución PTC0003-22

El pulso triangular constituye una función *f(t)* de la forma



Abordaremos el problema mediante dos planteamientos. En primer lugar veremos cómo puede calcularse la transformada aplicando directamente las expresiones de la misma. En el segundo enfoque aprovecharemos algunas de las transformadas de Fourier para simplificar el cálculo.

<u>Primer enfoque</u>

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

La señal *f(t)* puede considerarse compuesta por dos rectas independientes que se corresponderían con las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$. Por lo tanto,

$$F(\omega) = \int_{-d}^{0} f_1(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{d} f_2(t) e^{-j\omega t} dt$$

Las rectas $f_1(t)$ y $f_2(t)$ pueden calcularse fácilmente pues se conocen los puntos por los que pasan. Recordando que la ecuación de una recta que pasa por dos puntos es

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

o, lo que es lo mismo,

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Para la primera de las rectas, que pasa por los puntos *[-d,0]* y *[0,A]*, tenemos

$$f_1(t) = 0 + \frac{A - 0}{0 - (-d)}(t + d) = \frac{A}{d}(t + d)$$

$$f_1(t) = A + \frac{A}{d} t$$

Para la segunda recta podemos escribir

$$f_2(t) = A + \frac{0 - A}{d - 0}(t - 0) = A - \frac{A}{d} t$$

Con estos resultados podemos escribir de nuevo la transformada como

$$F(\omega)=\int_{-d}^{0}\left(A+\frac{A}{d}t\right)e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{d}\left(A-\frac{A}{d}t\right)e^{-j\omega t}dt$$

$$F(\omega)=\int_{-d}^{0}Ae^{-j\omega t}dt+\int_{-d}^{0}\frac{A}{d}te^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{d}Ae^{-j\omega t}dt-\int_{0}^{d}\frac{A}{d}te^{-j\omega t}dt$$

Agrupando términos

$$F(\omega)=A\int_{-d}^{d}e^{-j\omega t}dt+\frac{A}{d}\int_{-d}^{0}te^{-j\omega t}dt-\frac{A}{d}\int_{0}^{d}te^{-j\omega t}dt$$

Para simplicidad de la resolución denominemos $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ y $X_3(\omega)$ respectivamente a cada una de las integrales anteriores. De esta forma

$$F(\omega)=X_1(\omega)+X_2(\omega)+X_3(\omega)$$

Resolvamos ahora cada una de ellas. Para la primera tenemos

$$X_1(\omega)=A\int_{-d}^{d}e^{-j\omega t}dt=\frac{A}{-j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{-d}^{d}=\frac{A}{-j\omega}\left(e^{-j\omega d}-e^{j\omega d}\right)$$

$$X_1(\omega)=\frac{A}{j\omega}\left(e^{j\omega d}-e^{-j\omega d}\right)$$

En el caso de la segunda integral podemos escribir

$$X_2(\omega)=\frac{A}{d}\int_{-d}^{0}te^{-j\omega t}dt$$

Esa integral no es inmediata de resolver. Abordémosla por partes, haciendo los siguientes cambios de variables

$$u=t \quad\Rightarrow\quad du=dt$$

$$dv=e^{-j\omega t}dt \quad\Rightarrow\quad v=\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}$$

Recordando que en la integración por partes

$$\int u\,dv=u\cdot v-\int v\,du$$

podemos sustituir

$$X_2(\omega)=\frac{A}{d}\left[t\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-d}^{0}-\frac{A}{d}\int_{-d}^{0}\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}dt$$

$$X_2(\omega)=\frac{A}{d}\left[0+d\frac{e^{j\omega d}}{-j\omega}\right]-\frac{A}{d(-j\omega)}\frac{\left[e^{-j\omega t}\right]_{-d}^{0}}{-j\omega}$$

$$X_2(\omega)=\frac{-A}{j\omega}e^{j\omega d}+\frac{A}{d\omega^2}\left(e^{-j\omega 0}-e^{j\omega d}\right)$$

$$X_2(\omega)=\frac{-A}{j\omega}e^{j\omega d}+\frac{A}{d\omega^2}\left(1-e^{j\omega d}\right)$$

Para la última de las integrales tenemos

$$X_3(\omega)=-\frac{A}{d}\int_{0}^{d}te^{-j\omega t}dt$$

Esa integral tampoco es inmediata de resolver. Abordémosla por partes, haciendo los mismos cambios de variables que en el caso anterior

$$u = t \quad \Rightarrow \quad du = dt$$

$$dv = e^{-j\omega t}dt \quad \Rightarrow \quad v = \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}$$

Recordando que en la integración por partes

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

podemos sustituir

$$X_3(\omega) = -\frac{A}{d}\left[t\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_0^d + \frac{A}{d}\int_0^d \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}dt$$

$$X_3(\omega) = -\frac{A}{d}\left[d\frac{e^{-j\omega d}}{-j\omega} - 0\right] + \frac{A}{d(-j\omega)}\frac{\left[e^{-j\omega t}\right]_0^d}{-j\omega}$$

$$X_3(\omega) = \frac{A}{j\omega}e^{-j\omega d} - \frac{A}{d\omega^2}\left(e^{-j\omega d} - e^{j\omega 0}\right)$$

$$X_3(\omega) = \frac{A}{j\omega}e^{-j\omega d} - \frac{A}{d\omega^2}\left(e^{-j\omega d} - 1\right)$$

Con estos tres resultados estamos ya en condiciones de reanudar el cálculo de la transformado de Fourier. En efecto,

$$F(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega)$$

$$F(\omega) = \frac{A}{j\omega}\left(e^{j\omega d} - e^{-j\omega d}\right) + \frac{-A}{j\omega}e^{j\omega d} + \frac{A}{d\omega^2}\left(1 - e^{j\omega d}\right) + \frac{A}{j\omega}e^{-j\omega d} - \frac{A}{d\omega^2}\left(e^{-j\omega d} - 1\right)$$

$$F(\omega) = e^{j\omega d}\left(\frac{A}{j\omega} - \frac{A}{j\omega} - \frac{A}{d\omega^2}\right) + e^{-j\omega d}\left(-\frac{A}{j\omega} + \frac{A}{j\omega} - \frac{A}{d\omega^2}\right) + \left(\frac{A}{d\omega^2} + \frac{A}{d\omega^2}\right)$$

$$F(\omega) = e^{j\omega d}\left(\frac{-A}{d\omega^2}\right) + e^{-j\omega d}\left(\frac{-A}{d\omega^2}\right) + \frac{2A}{d\omega^2}$$

$$F(\omega) = \frac{A}{d\omega^2}\left(2 - e^{j\omega d} - e^{-j\omega d}\right) = \frac{2A}{d\omega^2}\left[1 - \frac{\left(e^{j\omega d} + e^{-j\omega d}\right)}{2}\right] = \frac{2A}{d\omega^2}\left[1 - \cos(\omega d)\right]$$

Recordando la expresión del coseno del ángulo doble tenemos

$$\cos(2x) = \cos^2 x - sen^2 x = \left(1 - sen^2 x\right) - sen^2 x = 1 - 2sen^2 x$$

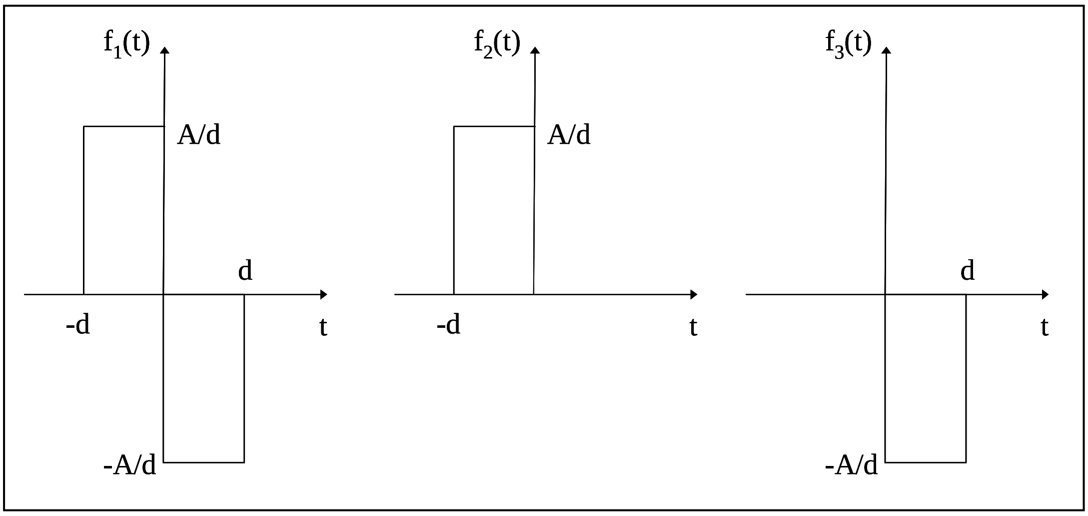
$$F(\omega) = \frac{2A}{d\omega^2}\left[1 - \left\{1 - 2sen^2\left(\frac{\omega d}{2}\right)\right\}\right] = \frac{2A}{d\omega^2}2sen^2\left(\frac{\omega d}{2}\right) = \frac{4A}{d\omega^2}sen^2\left(\frac{\omega d}{2}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{4A}{d\omega^2}sen^2\left(\frac{\omega d}{2}\right)\frac{\left(\frac{\omega d}{2}\right)^2}{\left(\frac{\omega d}{2}\right)^2} = \frac{4A}{d\omega^2}Sa^2\left(\frac{\omega d}{2}\right)\frac{\omega^2 d^2}{4}$$

$$F(\omega) = Ad\,Sa^2\left(\frac{\omega d}{2}\right)$$

Segundo enfoque

Hemos visto cómo el cálculo de *F(ω)* por el método directo lleva a unas expresiones de una cierta complejidad, con alto riesgo de cometer errores en su manipulación. En este segundo enfoque de resolución intentaremos aprovechar las propiedades de la transformada de Fourier para abordar el problema planteado. Consideremos para ello las funciones de la figura.



Podemos observar que

$$f_1(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

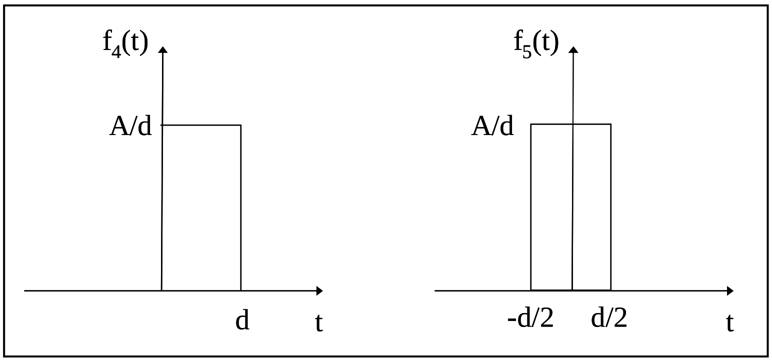
o, lo que es lo mismo,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} f_1(x)\,dx$$

Por otra parte, vemos que la función $f_1(t)$ puede expresarse como

$$f_1(t) = f_2(t) + f_3(t)$$

Consideremos ahora dos nuevas funciones



Podemos observar que

$$f_3(t) = -f_4(t)$$

y que

$$f_4(t) = f_5\left(t - \frac{d}{2}\right)$$

Igualmente,

$$f_2(t) = f_5\left(t + \frac{d}{2}\right)$$

Pero, por otra parte, la transformada de la función $f_5(t)$ es fácil de calcular ya que se trata de una función pulso, muy habitual en comunicaciones. En efecto,

$$F_5(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_5(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{A}{d}\, e^{-j\omega t}dt = \frac{A}{d}\frac{1}{-j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{-d/2}^{d/2}$$

$$F_5(\omega) = \frac{-A}{j\omega d}\left(e^{-j\omega d/2} - e^{j\omega d/2}\right) = \frac{A}{j\omega d}\frac{\left(e^{j\omega d/2} - e^{-j\omega d/2}\right)}{2j}2j$$

$$F_5(\omega) = \frac{2A}{\omega d}sen(\omega d/2) = \frac{2A}{\omega d}\frac{sen(\omega d/2)}{\omega d/2}\omega d/2$$

$$F_5(\omega) = ASa\left(\frac{\omega d}{2}\right)$$

Para calcular la transformada de la función $f_4(t)$ sólo tenemos que fijarnos en que es un desplazamiento a la derecha en el tiempo de la función $f_5(t)$. Aplicando la propiedad correspondiente podemos escribir

$$F_4(\omega) = e^{-j\omega d/2}F_5(\omega) = e^{-j\omega d/2}ASa\left(\frac{\omega d}{2}\right)$$

La transformada de la función $f_3(t)$ es tan simple como

$$F_3(\omega) = -F_4(\omega) = -e^{-j\omega d/2}ASa\left(\frac{\omega d}{2}\right)$$

Para calcular la transformada de la función $f_2(t)$ sólo tenemos que fijarnos en que es un desplazamiento a la izquierda en el tiempo de la función $f_5(t)$. Aplicando la propiedad correspondiente podemos escribir

$$F_2(\omega) = e^{j\omega d/2}F_5(\omega) = e^{j\omega d/2}ASa\left(\frac{\omega d}{2}\right)$$

La transformada de la función $f_1(t)$ es una simple suma

$$F_1(\omega) = F_2(\omega) + F_3(\omega) = e^{j\omega d/2}ASa\left(\frac{\omega d}{2}\right) - e^{-j\omega d/2}ASa\left(\frac{\omega d}{2}\right)$$

$$F_1(\omega) = ASa\left(\frac{\omega d}{2}\right)\left(e^{j\omega d/2} - e^{-j\omega d/2}\right) = ASa\left(\frac{\omega d}{2}\right)\frac{\left(e^{j\omega d/2} - e^{-j\omega d/2}\right)}{2j}2j$$

$$F_1(\omega) = 2jASa\left(\frac{\omega d}{2}\right)sen(\omega d/2) = 2jASa\left(\frac{\omega d}{2}\right)\frac{sen(\omega d/2)}{\omega d/2}\omega d/2$$

$$F_1(\omega) = jA\omega d\,Sa\left(\frac{\omega d}{2}\right)Sa\left(\frac{\omega d}{2}\right) = jA\omega d\,Sa^2\left(\frac{\omega d}{2}\right)$$

Por último, teniendo en cuenta que *f(t)* es la integral de $f_1(t)$ podemos escribir

$$F(\omega)=\frac{F_1(\omega)}{j\omega}+\pi F_1(0)\delta(\omega)$$

$$F(\omega)=\frac{jA\omega d\,Sa^2\left(\frac{\omega d}{2}\right)}{j\omega}+\pi jA0d\,Sa^2\left(\frac{0d}{2}\right)\delta(\omega)$$

Y finalmente obtenemos

$$F(\omega)=Ad\,Sa^2\left(\frac{\omega d}{2}\right)$$

que es el mismo resultado que obtuvimos por el primer método.