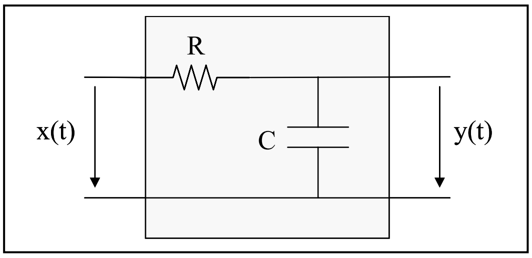
Problema PTC0003-24

En el circuito RC de la figura la salida *y(t)* ante un escalón de entrada de A voltios viene dado por

$$y(t) = A\left(1 - e^{-t/RC}\right)u(t)$$

donde *u(t)* es un escalón unitario.



a) Comprobar que se verifica

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

b) Comprobar la atenuación de los componentes de alta frecuencia

Solución PTC0003-24

Apartado a)

Calculemos en primer lugar la función de transferencia del circuito RC. En dicho circuito, llamando *i(t)* a la intensidad, se cumple que

$$x(t) = i(t)R + y(t)$$

La ecuación del condensador es

$$i(t) = C\frac{dy(t)}{dt}$$

Sustituyendo en la anterior

$$x(t) = RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

lo que se puede expresar también como

$$x(t) = RCDy(t) + y(t)$$
$$x(t) = [1 + RCD]y(t)$$

Recordando que la función de transferencia se puede calcular en función de los polinomios en *D* de la ecuación diferencial del sistema, podemos escribir

$$H(\omega) = \frac{P_A(j\omega)}{P_B(j\omega)} = \frac{1}{1 + RCj\omega} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Calculemos ahora la transformada *X(ω)* de la señal de entrada. Teniendo en cuenta que

$$x(t) = Au(t)$$

y recordando que la transformada de un escalón unitario es

$$U(\omega) = \pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

podemos escribir que

$$X(\omega)=A\left[\pi\cdot\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]$$

Por último determinemos la transformada *Y(ω)* de la señal de salida. Teniendo en cuenta que

$$y(t)=A\left(1-e^{-t/RC}\right)u(t)$$

y recordando que la transformada de una exponencial es

$$\mathcal{F}\left[e^{-at}u(t)\right]=\frac{1}{a+j\omega}$$

podemos escribir que

$$Y(\omega)=A\left[\pi\cdot\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]-A\frac{1}{1/RC+j\omega}$$

$$Y(\omega)=A\pi\cdot\delta(\omega)+\frac{A}{j\omega}-\frac{ARC}{1+j\omega RC}$$

$$Y(\omega)=A\pi\cdot\delta(\omega)+\frac{A+Aj\omega RC-Aj\omega RC}{j\omega\left(1+j\omega RC\right)}$$

$$Y(\omega)=A\pi\cdot\delta(\omega)+\frac{A}{j\omega-\omega^2 RC}$$

Con estos cálculos estamos en condiciones de comprobar si se verifica la expresión

$$Y(\omega)=X(\omega)\cdot H(\omega)$$

Para ello calculemos el producto del segundo miembro

$$X(\omega)\cdot H(\omega)=A\left[\pi\cdot\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]\cdot\frac{1}{1+j\omega RC}$$

$$X(\omega)\cdot H(\omega)=\frac{A\pi\cdot\delta(\omega)}{1+j\omega RC}+\frac{A}{j\omega-\omega^2 RC}$$

Como la función delta es cero para cualquier punto excepto para el origen, se cumple que, para cualquier función *f(x)*

$$f(x)\cdot\delta(x)=f(0)\cdot\delta(x)$$

Por lo tanto, el primer término de la ecuación vale

$$\frac{A\pi}{1+j\omega RC}\cdot\delta(\omega)=\frac{A\pi}{1+j0RC}\cdot\delta(\omega)=A\pi\cdot\delta(\omega)$$

Sustituyendo tenemos finalmente que

$$X(\omega)\cdot H(\omega)=A\pi\cdot\delta(\omega)+\frac{A}{j\omega-\omega^2 RC}$$

lo que coincide con el valor antes calculado de *Y(ω)*.

Apartado b)

Para verificar la atenuación de los componentes de alta frecuencia podemos ver que ocurre con la función de transferencia para valores grandes de la frecuencia. Sabemos que

$$H(\omega)=\frac{1}{1+j\omega RC}$$

Para frecuencias muy grandes tenemos que

$$\lim_{\omega\to\infty}\left|H(\omega)\right| = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{\left|1+j\omega RC\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{\omega\to\infty}\sqrt{1+(\omega RC)^2}} = 0$$

con lo que se demuestra la atenuación.

Otra forma de enfocar la cuestión es observar que las componentes espectrales de la entrada

$$X(\omega) = A\left[\pi\cdot\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]$$

decrecen con ω mientras que las de la salida

$$Y(\omega) = A\pi\cdot\delta(\omega)+\frac{A}{j\omega-\omega^2 RC}$$

lo hacen con el cuadrado de ω. Es decir, decrecen más rápidamente que la entrada lo que demuestra la atenuación cuando la frecuencia aumenta. Este es el comportamiento característico de un filtro paso de baja.