Problema PTC0003-25

Demostrar que

$$a_n \cos\omega_n t + b_n sen\omega_n t = k_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

calculando la relación que debe verificarse entre los parámetros para que la expresión sea cierta.

Solución PTC0003-25

Desarrollemos el segundo término de la igualdad:

$$k_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) = k_n \cos\omega_n t \cdot \cos\varphi_n - k_n sen\omega_n t \cdot sen\varphi_n$$

Agrupando términos

$$k_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) = (k_n \cos\varphi_n)\cos\omega_n t + (-k_n sen\varphi_n) sen\omega_n t$$

Por lo que, comparando con la expresión original, tenemos que debe verificarse

$$\begin{cases} a_n = k_n \cos\varphi_n \\ b_n = -k_n sen\varphi_n \end{cases}$$

Elevando al cuadrado y sumando obtenemos

$$\begin{cases} a_n^2 = k_n^2 \cos^2\varphi_n \\ b_n^2 = k_n^2 sen^2\varphi_n \end{cases}$$

$$a_n^2 + b_n^2 = k_n^2 \cos^2\varphi_n + k_n^2 sen^2\varphi_n = k_n^2(\cos^2\varphi_n + sen^2\varphi_n) = k_n^2$$

de donde obtenemos finalmente

$$k_n = \pm\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Si nos fijamos de nuevo en la expresión

$$\begin{cases} a_n = k_n \cos\varphi_n \\ b_n = -k_n sen\varphi_n \end{cases}$$

y dividimos la segunda ecuación entre la primera, tenemos

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{-k_n sen\varphi_n}{k_n \cos\varphi_n} = -tg\varphi_n$$

de donde obtenemos finalmente

$$\varphi_n = arctg\frac{-b_n}{a_n}$$

Hay que señalar que la relación entre los parámetros no es única ya que, de las expresiones anteriores, se deduce que existen dos soluciones para el valor de k_n e infinitas soluciones para la fase φ_n. Habitualmente suelen interpretarse las expresiones

$$\begin{cases} a_n = k_n \cos\varphi_n \\ b_n = -k_n sen\varphi_n \end{cases}$$

en función de las representaciones cartesiana y polar de un vector de módulo k_n y ángulo $-\varphi_n$. En efecto, la expresión anterior podemos escribirla como

$$\begin{cases} a_n = k_n \cos(-\varphi_n) \\ b_n = k_n sen(-\varphi_n) \end{cases}$$

Con esta interpretación se suele tomar la solución positiva de k_n y la solución para la fase φ_n comprendida entre $-\pi$ y π.