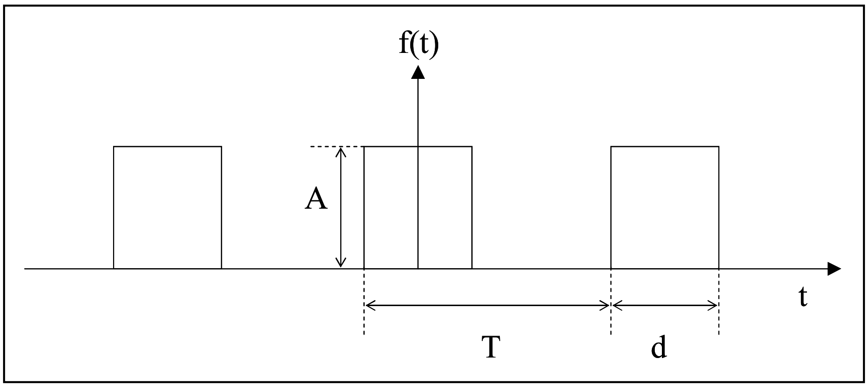
Problema PTC0003-26

Calcular el desarrollo en serie trigonométrica de Fourier, con términos en senos y cosenos, de una onda cuadrada como la de la figura. Determinar su espectro de amplitud y fase.



Solución PTC0003-26

Al ser *f(t)* una función periódica, admite un desarrollo en serie de Fourier de acuerdo con la expresión

$$f(t) = \frac{a_0}{T} + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(\omega_n t) + b_n sen(\omega_n t)\right]$$

en la que los distintos coeficientes se calculan de acuerdo con las relaciones siguientes:

$$a_0 = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \int_{-d/2}^{d/2} A dt = A[t]_{-d/2}^{d/2} = A\left[\frac{d}{2} - \frac{-d}{2}\right] = Ad$$

Para los términos en coseno tenemos

$$a_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(\omega_n t)dt = \int_{-d/2}^{d/2} A\cos(\omega_n t)dt = \frac{A}{\omega_n}\left[sen(\omega_n t)\right]_{-d/2}^{d/2}$$

$$a_n = \frac{A}{\omega_n}\left[sen\left(\frac{\omega_n d}{2}\right) - sen\left(\frac{-\omega_n d}{2}\right)\right] = \frac{A}{\omega_n}2sen\left(\frac{\omega_n d}{2}\right) = \frac{A}{\frac{2\pi n}{T}}2sen\left(\frac{\frac{2\pi n}{T}d}{2}\right)$$

$$a_n = \frac{AT}{n\pi}sen\left(\frac{n\pi d}{T}\right)$$

Y para los términos en seno tenemos

$$b_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)sen(\omega_n t)dt = \int_{-d/2}^{d/2} Asen(\omega_n t)dt = \frac{-A}{\omega_n}\left[\cos(\omega_n t)\right]_{-d/2}^{d/2}$$

$$b_n = \frac{-A}{\omega_n}\left[\cos\left(\frac{\omega_n d}{2}\right) - \cos\left(\frac{-\omega_n d}{2}\right)\right] = 0$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes, tenemos que el desarrollo en serie de Fourier queda

$$f(t) = \frac{Ad}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2A}{n\pi} sen\left(\frac{n\pi d}{T} \right) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T} \right) \right]$$

El espectro de amplitud y fase se podría interpretar de dos formas: como el de las amplitudes y fase de cada uno de los armónicos, o como el que se deriva de las contantes a_n y b_n. Siguiendo esta segunda interpretación, y siendo $b_n=0$ para todo n, la amplitud coincide con a_n y la fase es cero para los valores positivos de a_n y vale π para los valores negativos de a_n.

El primer cruce por cero del espectro de amplitud se produce para el armónico n_c que se calcula como

$$a_{n_c} = \frac{AT}{n_c\pi} sen\left(\frac{n_c\pi d}{T} \right) = 0$$

$$sen\left(\frac{n_c\pi d}{T} \right) = 0$$

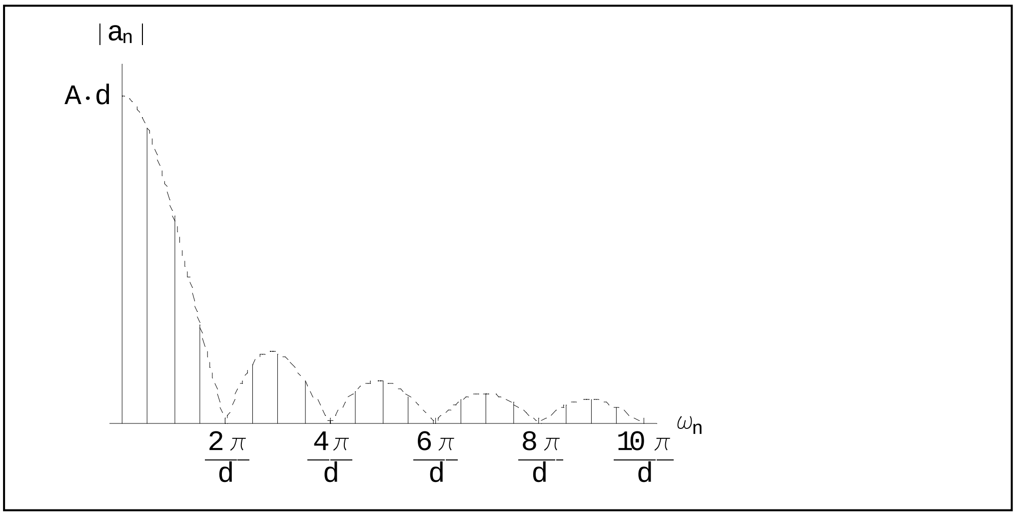
$$\frac{n_c\pi d}{T} = \pi$$

$$n_c = \frac{T}{d}$$

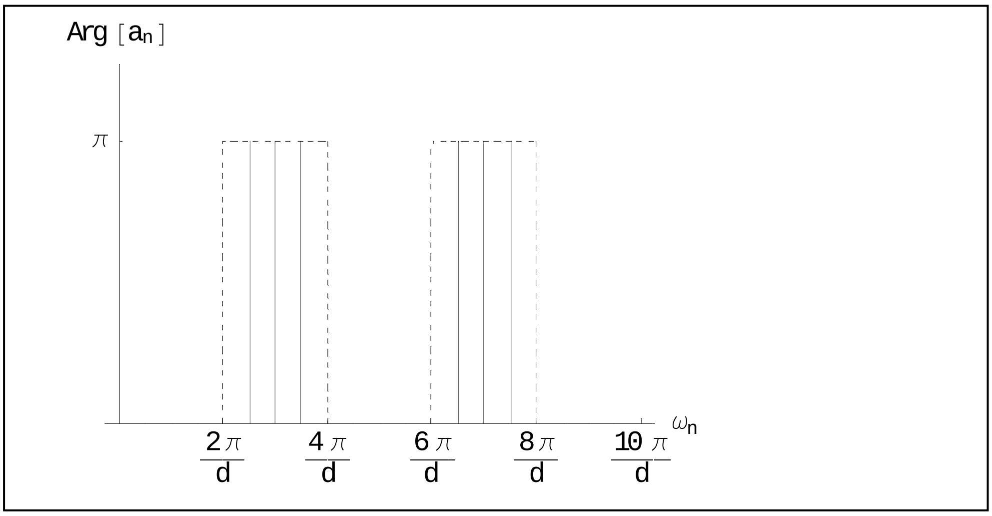
que se corresponde con la frecuencia

$$\omega_c = \frac{2\pi n_c}{T} = \frac{2\pi \frac{T}{d}}{T} = \frac{2\pi}{d}$$

Gráficamente, el espectro de amplitud es



Por su parte el espectro de fase aparece como


Arg [a_n]
π
ω_n
$\frac{2\pi}{d}$
$\frac{4\pi}{d}$
$\frac{6\pi}{d}$
$\frac{8\pi}{d}$
$\frac{10\pi}{d}$