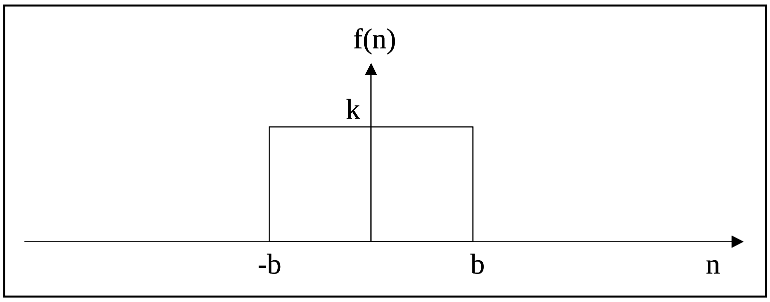
Problema PTC0003-27

Un sistema de comunicaciones codifica los bits en NRZ polar (+*A* voltios para el 1 y –*A* voltios para el cero). Dicha transmisión se ve afectada por un ruido aleatorio con función de densidad uniforme entre –*b* y +*b* voltios. Determinar analítica y gráficamente la probabilidad de que se produzca un error en un bit en función exclusivamente de la relación señal-ruido en el canal.

Solución PTC0003-27

Sea *n(t)* la función temporal correspondiente al ruido aleatorio. Denominemos *f(n)* a la función de densidad de probabilidad de dicho ruido. Su representación gráfica es la siguiente



En toda función de densidad de probabilidad se verifica que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(n)dn = 1$$

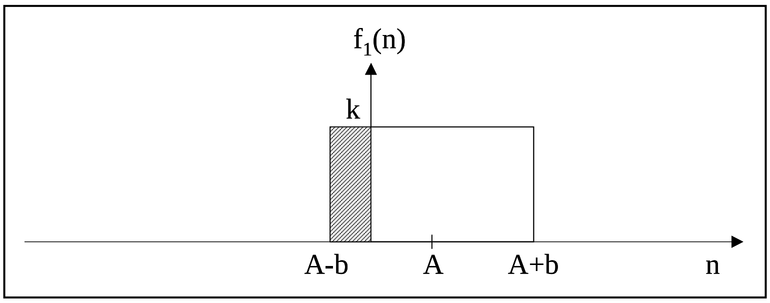
por lo que, en nuestro caso,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(n)dn = \int_{-b}^{b} kdn = k[n]_{-b}^{b} = k[b-(-b)] = 2kb = 1$$

Esto nos conduce a que

$$k = \frac{1}{2b}$$

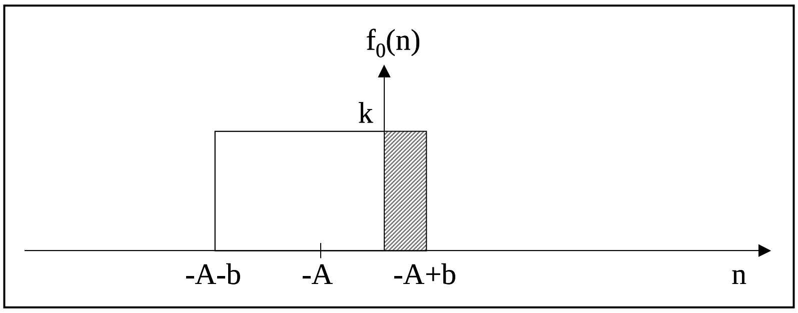
Como el enunciado no afirma nada, supondremos que el ruido es aditivo. En ese caso, la función $f_1(n)$ de densidad de probabilidad cuando se transmite un 1 será como la de la figura



En esta gráfica el área rayada se corresponde con la probabilidad de que la señal en el receptor, después de que se la haya añadido el ruido del canal, sea menor que cero. Si suponemos que el receptor toma la decisión sobre el valor digital de la señal en función de que ésta sea positiva o negativa, entonces el área rayada se corresponde con la probabilidad de que la señal sea recibida como un cero, cuando en realidad lo que se transmitió fue un uno. En definitiva el área señalada es la probabilidad de que se produzca un error en la transmisión cuando se envía un uno. Este probabilidad vale

$$P_{e1} = \int_{A-b}^{0} f_1(n)dn = \int_{A-b}^{0} kdn = k[n]_{A-b}^{0} = k[0-(A-b)] = \frac{b-A}{2b}$$

Análogamente, la función $f_0(n)$ de densidad de probabilidad cuando se transmite un 0 será como la de la figura



En esta gráfica el área señalada es la probabilidad de que se produzca un error en la transmisión cuando se envía un cero. Este probabilidad vale

$$P_{e0} = \int_{0}^{-A+b} f_0(n)dn = \int_{0}^{-A+b} kdn = k[n]_{0}^{-A+b} = k[(-A+b)-0] = \frac{b-A}{2b}$$

que vemos que coincide con el valor anterior.

Si denominamos P_0 a la probabilidad de que se transmita un cero y P_1 a la de que se transmita un uno, la probabilidad de error será

$$P_e = P_0 P_{e0} + P_1 P_{e1}$$

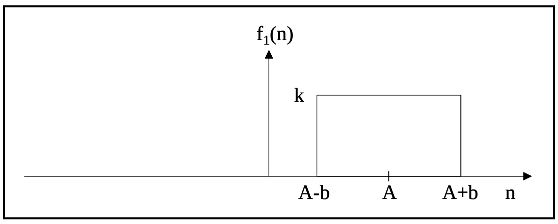
Si en promedio se transmiten el mismo número de ceros que de unos tenemos que

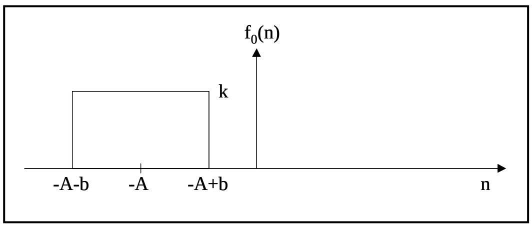
$$P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$$

por lo que queda

$$P_e = \frac{1}{2}P_{e0} + \frac{1}{2}P_{e1} = \frac{1}{2}(P_{e0} + P_{e1}) = \frac{1}{2}\left(\frac{b-A}{2b} + \frac{b-A}{2b}\right) = \frac{b-A}{2b}$$

Todo esto ocurre si $A<b$. En caso contrario, tenemos la situación de las figuras





en las que, obviamente,

$$P_e = P_{e0} = P_{e1} = 0$$

Es preciso ahora expresar ahora la probabilidad de error en función de la relación señal ruido (SNR). Sabemos que

$$SNR = \frac{S}{N}$$

Por una parte, la potencia de la señal S es fácil de calcular puesto que se trata de una señal digital de sólo dos valores ($+A$ y $-A$) y en ambos casos la potencia es la misma

$$S = A^2$$

Por otra parte, también sabemos que la potencia del ruido N es igual a la varianza (recordemos que el ruido es aleatorio), y que vale

$$N = \sigma^2(n) = \int_{-\infty}^{\infty} [n - \mu(n)]^2 f(n) dn$$

Teniendo en cuenta que la media del ruido vale

$$\mu(n) = \int_{-\infty}^{\infty} n f(n) dn = k \int_{-b}^{b} n dn = k \left[\frac{n^2}{2} \right]_{-b}^{b} = k \left[\frac{b^2}{2} - \frac{(-b)^2}{2} \right] = 0$$

podemos sustituir y obtener

$$N = \sigma^2(n) = \int_{-\infty}^{\infty} n^2 f(n) dn = k \int_{-b}^{b} n^2 dn = k \left[\frac{n^3}{3} \right]_{-b}^{b} = k \left[\frac{b^3}{3} - \frac{(-b)^3}{3} \right] = \frac{2}{3} k b^3$$

Recordando el valor de k podemos escribir finalmente

$$N = \sigma^2(n) = \frac{2}{3} \frac{1}{2b} b^3 = \frac{b^2}{3}$$

Sustituyendo los valores de S y N tenemos

$$SNR = \frac{S}{N} = \frac{A^2}{\frac{b^2}{3}} = \frac{3A^2}{b^2}$$

Estamos ahora en condiciones de expresar la probabilidad de error en función de la SNR. En efecto, como vimos

$$P_e = \frac{b - A}{2b} = \frac{A\left(\frac{b}{A} - 1\right)}{A\left(2\frac{b}{A}\right)} = \frac{\frac{b}{A} - 1}{2\frac{b}{A}}$$

Pero de la expresión de la SNR podemos deducir

$$SNR = \frac{3A^2}{b^2}$$

$$\frac{b^2}{A^2} = \frac{3}{SNR}$$

$$\frac{b}{A} = \sqrt{\frac{3}{SNR}}$$

por lo que sustituyendo obtenemos

$$P_e = \frac{\sqrt{\frac{3}{SNR}} - 1}{2\sqrt{\frac{3}{SNR}}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{SNR}}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{SNR}{3}}\right)$$

Resumiendo los dos casos posibles tenemos

$$\begin{cases} A < b \quad \rightarrow \quad P_e = \dfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\dfrac{SNR}{3}}\right) \\ A \geq b \quad \rightarrow \quad P_e = 0 \end{cases}$$

También podemos expresar la relación entre *A* y *b* en función de la SNR. En efecto

$$A < b \quad \rightarrow \quad \frac{b}{A} > 1$$

$$A < b \quad \rightarrow \quad \frac{b}{A} = \sqrt{\frac{3}{SNR}} > 1$$

$$A < b \quad \rightarrow \quad \frac{3}{SNR} > 1^2 = 1$$

$$A < b \quad \rightarrow \quad SNR < 3$$

Por tanto el resumen de los dos casos posibles es ahora

$$\begin{cases} SNR < 3 \quad \rightarrow \quad P_e = \dfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\dfrac{SNR}{3}}\right) \\ SNR \geq 3 \quad \rightarrow \quad P_e = 0 \end{cases}$$

Gráficamente dicha expresión toma la siguiente forma