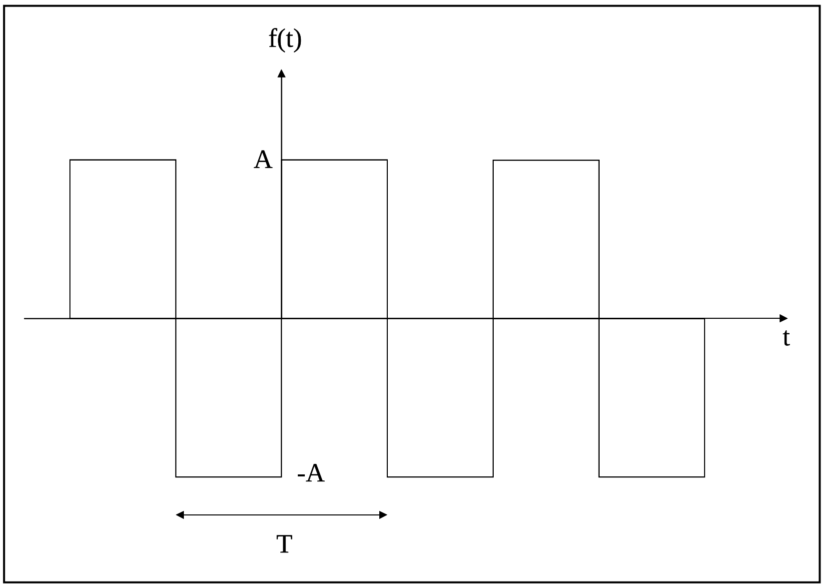
Problema PTC0003-28

Dibujar las aproximaciones de 1º, 3º, 5º, 7º y 9º orden de una onda cuadrada, según su desarrollo en serie trigonométrica de Fourier.



Solución PTC0003-28

Al ser *f(t)* una función periódica, admite un desarrollo en serie de Fourier de acuerdo con la expresión

$$f(t) = \frac{a_0}{T} + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(\omega_n t) + b_n sen(\omega_n t)\right]$$

en la que los distintos coeficientes se calculan de acuerdo con las relaciones siguientes:

$$a_0 = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \int_{-T/2}^{0} -Adt + \int_{0}^{T/2} Adt = -A[t]_{-T/2}^{0} + A[t]_{0}^{T/2}$$

$$a_0 = -A\left[0 - \frac{-T}{2}\right] + A\left[\frac{T}{2} - 0\right] = \frac{-AT}{2} + \frac{AT}{2} = 0$$

Para los términos en coseno tenemos

$$a_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(\omega_n t)dt = \int_{-T/2}^{0} -A\cos(\omega_n t)dt + \int_{0}^{T/2} A\cos(\omega_n t)dt$$

$$a_n = \frac{-A}{\omega_n}\left[sen(\omega_n t)\right]_{-T/2}^{0} + \frac{A}{\omega_n}\left[sen(\omega_n t)\right]_{0}^{T/2}$$

$$a_n = \frac{-A}{\omega_n}\left[sen(0) - sen\left(\omega_n \frac{-T}{2}\right)\right] + \frac{A}{\omega_n}\left[sen\left(\omega_n \frac{T}{2}\right) - sen(0)\right]$$

$$a_n = \frac{-A}{\frac{2\pi n}{T}}\left[0 + sen\left(\frac{2\pi n}{T}\frac{T}{2}\right)\right] + \frac{A}{\frac{2\pi n}{T}}\left[sen\left(\frac{2\pi n}{T}\frac{T}{2}\right) - 0\right]$$

$$a_n = \frac{-AT}{2\pi n} sen(n\pi) + \frac{AT}{2\pi n} sen(n\pi) = 0$$

Y para los términos en seno tenemos

$$b_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) sen(\omega_n t) dt = \int_{-T/2}^{0} -Asen(\omega_n t) dt + \int_{0}^{T/2} Asen(\omega_n t) dt$$

$$b_n = \frac{-A}{\omega_n}\left[-\cos(\omega_n t)\right]_{-T/2}^{0} + \frac{A}{\omega_n}\left[-\cos(\omega_n t)\right]_{0}^{T/2}$$

$$b_n = \frac{A}{\omega_n}\left[\cos(0) - \cos\left(\omega_n \frac{-T}{2}\right)\right] + \frac{-A}{\omega_n}\left[\cos\left(\omega_n \frac{T}{2}\right) - \cos(0)\right]$$

$$b_n = \frac{A}{\frac{2\pi n}{T}}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{T}\frac{T}{2}\right)\right] + \frac{-A}{\frac{2\pi n}{T}}\left[\cos\left(\frac{2\pi n}{T}\frac{T}{2}\right) - 1\right]$$

$$b_n = \frac{AT}{2\pi n} - \frac{AT}{2\pi n}\cos(n\pi) - \frac{AT}{2\pi n}\cos(n\pi) + \frac{AT}{2\pi n}$$

$$b_n = \frac{AT}{n\pi}\left[1 - \cos(n\pi)\right]$$

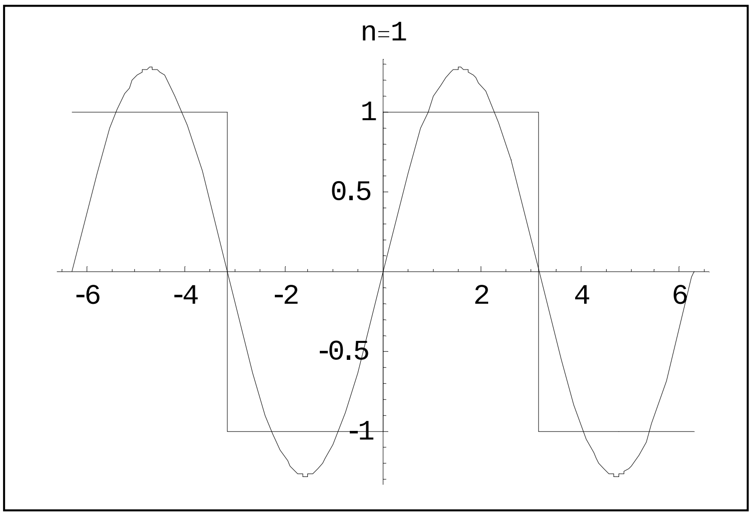
Sustituyendo los valores de los coeficientes, tenemos que el desarrollo en serie de Fourier queda

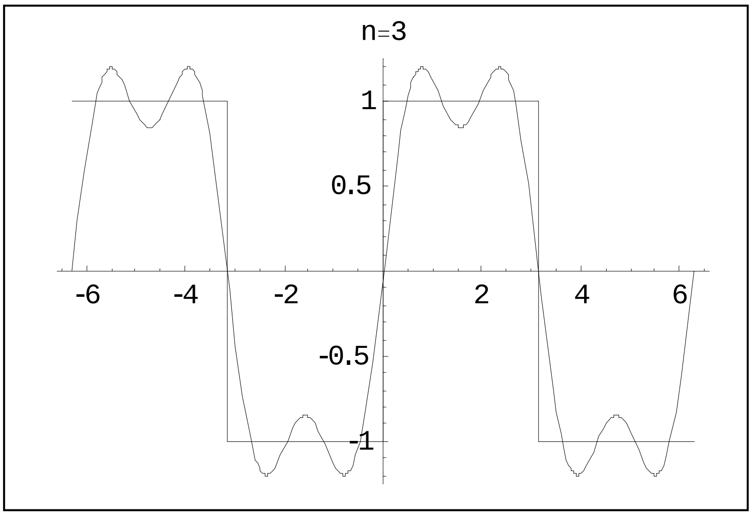
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2A}{n\pi}\left[1 - \cos(n\pi)\right] sen(\omega_n t)\right]$$

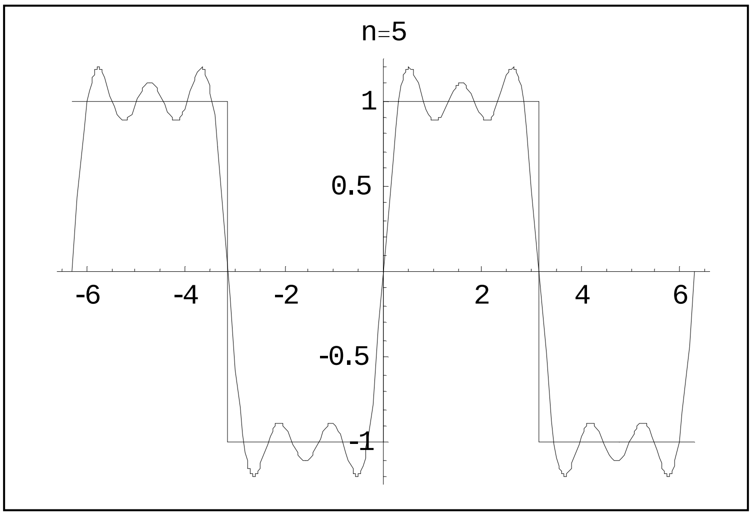
En este desarrollo vemos que los términos para *n* par son cero. Las amplitudes para los armónicos impares quedan bien recogidas en la siguiente tabla

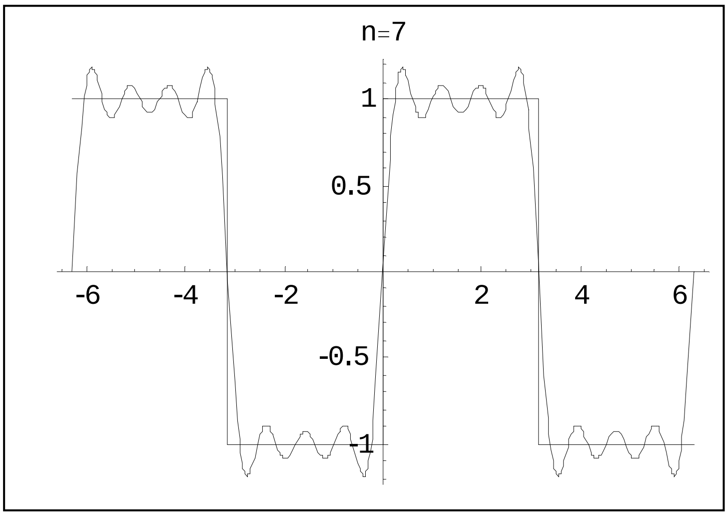
n	$\cos(n\pi)$	$[1-\cos(n\pi)]$	$\frac{2A}{n\pi}[1-\cos(n\pi)]$
1	-1	2	$\frac{4A}{\pi}$
2 (y resto de pares)	1	0	0
3	-1	2	$\frac{4A}{3\pi}$
5	-1	2	$\frac{4A}{5\pi}$
7	-1	2	$\frac{4A}{7\pi}$
9	-1	2	$\frac{4A}{9\pi}$

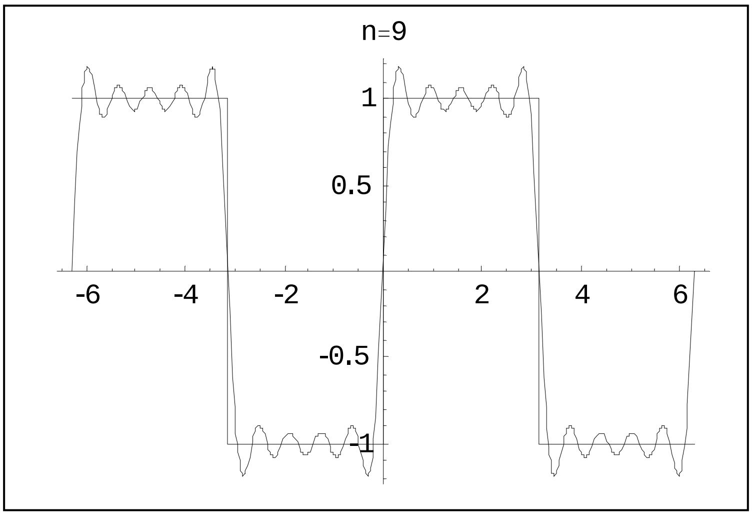
Las representaciones gráficas de las distintas aproximaciones serán pues, las siguientes:


n=1
1
0.5
-0.5
-1
-6
-4
-2
2
4
6

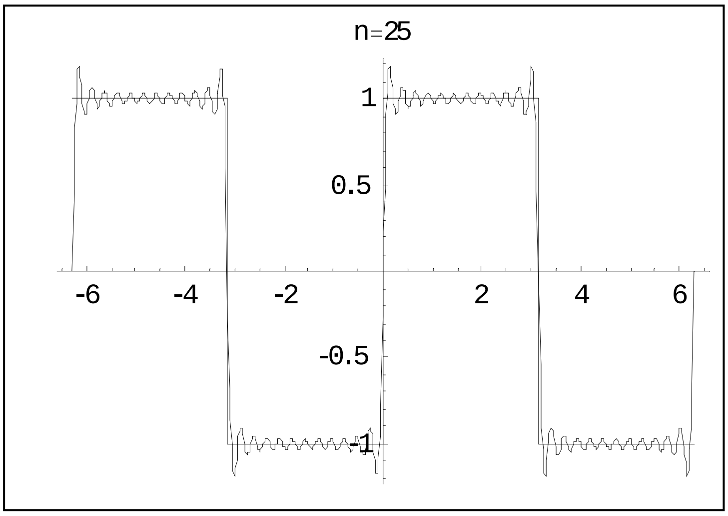

n=3
1
0.5
-0.5
-1
-6
-4
-2
2
4
6

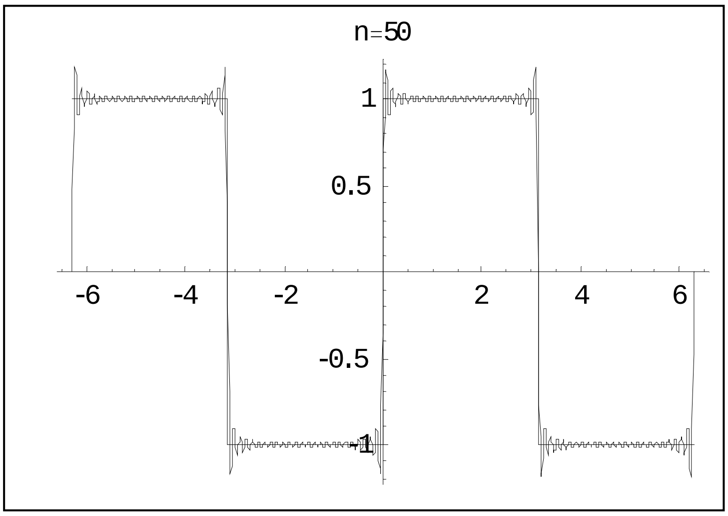

n=5
1
0.5
-0.5
-1
-6
-4
-2
2
4
6

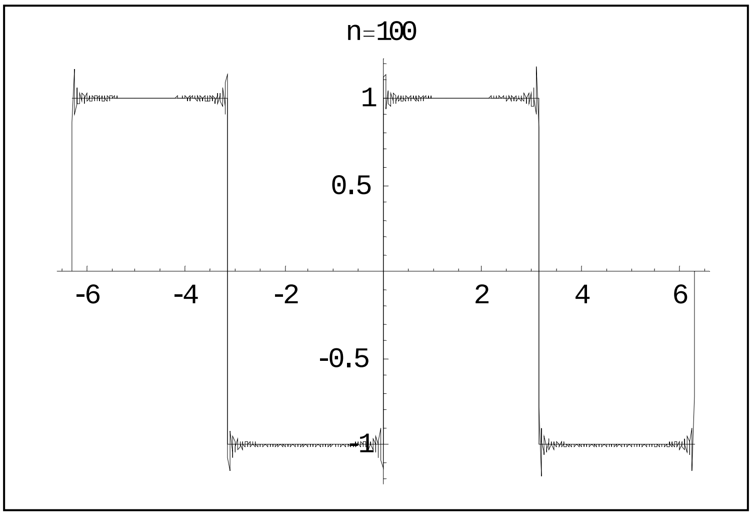




Para valores más altos de *n* la aproximación que se consigue a la onda cuadrada es todavía más precisa. Así, por ejemplo, se adjuntan las gráficas para *n* igual a 25, 50 y 100.




n=50
1
0.5
-6
-4
-2
2
4
6
-0.5
-1


n=100
1
0.5
-6
-4
-2
2
4
6
-0.5
-1