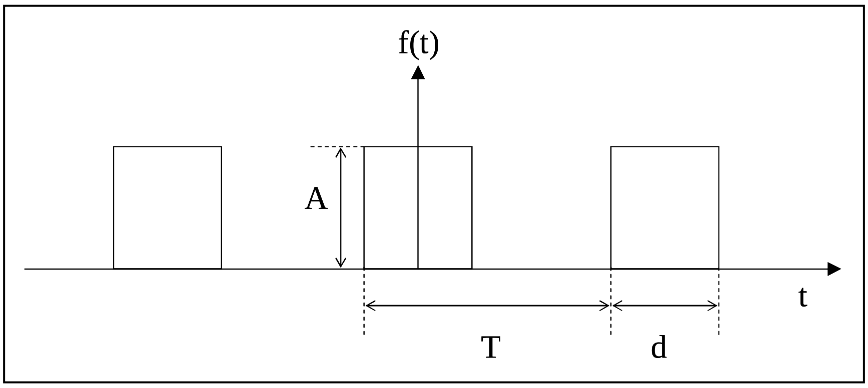
Problema PTC0003-29

Calcular el desarrollo en serie exponencial compleja de Fourier de un tren de pulsos como el de la figura. Determinar su espectro de amplitud y fase.



Solución PTC0003-29

Al ser *f(t)* una función periódica, admite un desarrollo en serie de Fourier de acuerdo con la expresión

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

en la que los coeficientes se calculan de acuerdo con:

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\omega_n t}dt$$

En nuestro caso tenemos

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\omega_n t}dt = \int_{-d/2}^{d/2} Ae^{-j\omega_n t}dt$$

$$c_n = \frac{-A}{j\omega_n}\left[e^{-j\omega_n t}\right]_{-d/2}^{d/2} = \frac{-A}{j\omega_n}\left[e^{-j\omega_n \frac{d}{2}} - e^{j\omega_n \frac{d}{2}}\right]$$

$$c_n = \frac{A}{j\omega_n}\left[e^{j\omega_n \frac{d}{2}} - e^{-j\omega_n \frac{d}{2}}\right]\frac{2j}{2j} = \frac{A}{j\omega_n}2jsen\left(\omega_n \frac{d}{2}\right)$$

$$c_n = \frac{2A}{\omega_n}sen\left(\omega_n \frac{d}{2}\right)\frac{\omega_n d/2}{\omega_n d/2}$$

$$c_n = AdSa\left(\omega_n \frac{d}{2}\right)$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes, tenemos que el desarrollo en serie de Fourier queda

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} AdSa\left(\omega_n \frac{d}{2}\right)e^{j\omega_n t}$$

El espectro de amplitud y fase se podría interpretar de dos formas: como el de las amplitudes y fases de cada uno de los armónicos, o como el que se deriva de las contantes c_n. Siguiendo esta segunda interpretación tenemos

$$|c_n| = \left| AdSa\left(\omega_n \frac{d}{2}\right)\right| = Ad\left|Sa\left(\omega_n \frac{d}{2}\right)\right|$$

$$\arg[c_n] = \arg\left[AdSa\left(\omega_n \frac{d}{2}\right)\right] = \arg\left[Sa\left(\omega_n \frac{d}{2}\right)\right]$$

El primer cruce por cero del espectro de amplitud se produce para el armónico n_c que se calcula como

$$c_{n_c} = AdSa\left(\omega_{n_c} \frac{d}{2}\right) = 0$$

$$Ad\,\frac{sen\left(\frac{2\pi n_c}{T}\frac{d}{2}\right)}{\frac{2\pi n_c}{T}\frac{d}{2}} = \frac{AT}{n_c\pi}\,sen\left(\frac{n_c\pi d}{T}\right) = 0$$

$$sen\left(\frac{n_c\pi d}{T}\right) = 0$$

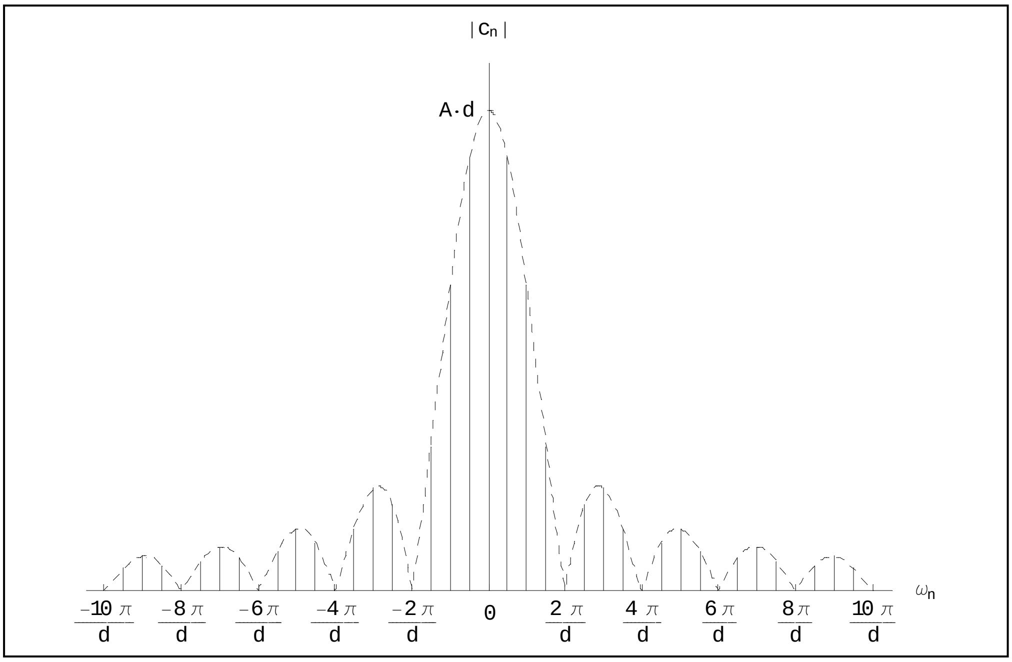
$$\frac{n_c\pi d}{T} = \pi$$

$$n_c = \frac{T}{d}$$

que se corresponde con la frecuencia

$$\omega_c = \frac{2\pi n_c}{T} = \frac{2\pi\frac{T}{d}}{T} = \frac{2\pi}{d}$$

Gráficamente, el espectro de amplitud es



Por su parte el espectro de fase aparece como