Problema PTC0003-30

Demostrar que

a) $\int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_i t)\cos(\omega_j t)dt = 0 \qquad \forall i \neq j$

b) $\int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(\omega_i t)\cos(\omega_j t)dt = 0 \qquad \forall i, j$

siendo

$\omega_n = \dfrac{2\pi n}{T}$

Solución PTC0003-30

Apartado a)

Para cualesquiera ángulos α y β se verifica:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad (1)$$

Consideremos $\qquad \omega_i t = \dfrac{\alpha+\beta}{2}; \qquad \omega_j t = \dfrac{\alpha-\beta}{2} \qquad (2)$

Mediante sustitución del producto del integrando, obtendremos una suma de integrales de funciones trigonométricas simples.

Sustituyendo en (1): $\quad \dfrac{1}{2}(\cos\alpha + \cos\beta) = \cos(\omega_i t)\cos(\omega_j t) \qquad (3)$

Resolviendo el sistema lineal de dos ecuaciones y dos incógnitas planteado en (2), tenemos:

$$\begin{cases} \alpha = \omega_i t + \omega_j t = (\omega_i + \omega_j)t = \omega(i+j)t \\ \beta = \omega_i t - \omega_j t = (\omega_i - \omega_j)t = \omega(i-j)t \end{cases}$$

Efectuamos las consideraciones: $y = i + j$; $x = i - j$. Entonces,

$$\begin{cases} \alpha = \omega \cdot y \cdot t \\ \beta = \omega \cdot x \cdot t \end{cases}$$

La integral original, llamémosle I, es:

$$I = \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_i t)\cos(\omega_j t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)dt = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} (\cos\alpha + \cos\beta)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega \cdot y \cdot t)dt + \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega \cdot x \cdot t)dt\right]$$

Tenemos que demostrar que $I = 0 \quad \forall i \neq j$.

Si $i \neq j$, entonces $x \neq 0$.
Estudiemos cada integral en que hemos descompuesto I.

$$I_1 = \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega \cdot y \cdot t)dt = \frac{1}{\omega \cdot y}\left[sen(\omega \cdot y \cdot t)\right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{1}{\omega \cdot y}\left[sen\left(\omega \cdot y\frac{T}{2}\right) - sen\left(-\omega \cdot y\frac{T}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\omega \cdot y}\left[sen\left(\frac{2\pi}{T}y\frac{T}{2}\right) - sen\left(-\frac{2\pi}{T}y\frac{T}{2}\right)\right] = \frac{1}{\omega \cdot y}\left[sen(\pi y) - sen(-\pi y)\right] =$$

$$= \frac{1}{\omega \cdot y}\left[sen(\pi y) + sen(\pi y)\right] = \frac{2}{\omega \cdot y} sen \pi y$$

Como *i* y *j* son valores enteros, e $y = i + j \rightarrow y$ es entero $\rightarrow$ $\operatorname{sen} \pi y = 0$;

Luego, $I_1 = 0$.
Otra forma de averiguar que $I_1 = 0$ es observando que se trata de la integral durante un periodo de una función cosenoidal. Veamos ahora la segunda integral.

$$I_2 = \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega \cdot x \cdot t)dt = 0$$

pues es una integral de la misma forma que I_1. En este punto es necesaria la consideración $i \neq j$. Si $i = j$, entonces $x = 0$, y entonces:

$$I_2 = \int_{-T/2}^{T/2} \cos 0 dt = \int_{-T/2}^{T/2} dt = [t]_{-T/2}^{T/2} = \frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right) = T \neq 0 \text{, y entonces}$$

$$I = \frac{1}{2}[I_1 + I_2] = \frac{1}{2}[0 + T] = \frac{T}{2} \neq 0.$$

Luego, con la suposición $i \neq j$, tenemos:

$$I_1 = I_2 = 0$$

$$I = \frac{1}{2}[I_1 + I_2] = 0, \qquad \text{q.e.d.}$$

Apartado b)

Sabemos que: $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

Considerando $\omega_i t = \frac{\alpha+\beta}{2}$; $\omega_j t = \frac{\alpha-\beta}{2}$, al resolver este sistema queda

$\alpha = \omega(i + j)t, \quad \beta = \omega(i - j)t$, como en el apartado anterior. Haciendo $y = i + j$, $x = i - j$, entonces $\alpha = \omega \cdot y \cdot t$, $\beta = \omega \cdot x \cdot t$. Entonces tenemos:

$$I = \int_{-T/2}^{T/2} sen(\omega_i t)\cos(\omega_j t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)dt = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2}(sen\alpha + sen\beta)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-T/2}^{T/2} sen\alpha\, dt + \int_{-T/2}^{T/2} sen\beta\, dt\right] = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\left(\int_{-T/2}^{T/2} sen(\omega\cdot y\cdot t)dt)\right)}_{I_1} + \underbrace{\left(\int_{-T/2}^{T/2} sen(\omega\cdot x\cdot t)dt\right)}_{I_2}\right];$$

$$I_1 = \int_{-T/2}^{T/2} sen(\omega\cdot y\cdot t)dt = \frac{-1}{\omega\cdot y}\left[\cos(\omega\cdot y\cdot t)\right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{-1}{\omega\cdot y}\left[\cos\left(\omega\cdot y\frac{T}{2}\right) - \cos\left(-\omega\cdot y\frac{T}{2}\right)\right] =$$

$$\frac{-1}{\omega\cdot y}\left[\cos\left(\omega\cdot y\frac{T}{2}\right) - \cos\left(\omega\cdot y\frac{T}{2}\right)\right] = 0$$

Otra forma de hallar el mismo resultado es considerando que I_1 es la integral durante un periodo de una función senoidal. Vemos ahora que la segunda integral $I_2 = 0$, por analogía con I_1.

Ahora no es necesaria la consideración $i \neq j$, pues si $i=j$, se cumple que I_2 sigue siendo 0. Veamos:

$$I_2 = \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{sen}(\omega(i-j)t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{sen}\, 0 dt = \int_{-T/2}^{T/2} 0 dt = 0$$

Luego, $I_2 = 0 \quad \forall i, j$.

Entonces $I = \frac{1}{2}[I_1 + I_2] = \frac{1}{2}[0+0] = 0 \quad \forall i, j$ q.e.d.