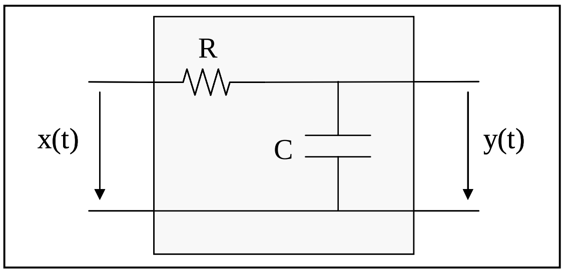
Problema PTC0003-35

Una señal transmitida en PCM, atraviesa un sistema de comunicación de ancho de banda 1 MHz (considerarlo un circuito RC). En el receptor se decide si el bit es un uno o un cero si en el final del pulso, la tensión está por encima o por debajo del umbral de decisión V=1voltio. El pulso se transmite como 0 voltios para el “0” y 2 voltios para el “1”.

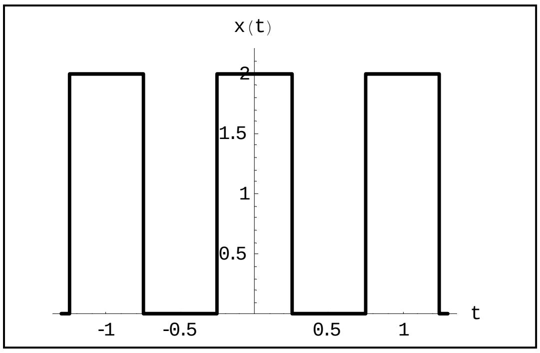
a) Calcular el mínimo ancho del pulso que se puede transmitir.
b) Calcular la máxima velocidad de transmisión de información.
c) Si se usan 256 niveles de cuantización calcular el máximo SNR de cuantización.
d) Calcular cuántos canales de voz de 4 KHz se pueden multiplexar en tal sistema.

Solución PTC0003-35

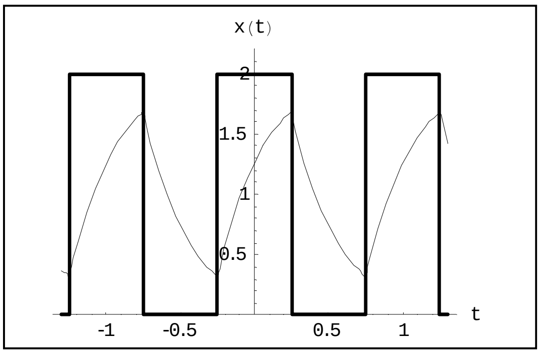
Apartado a)
El sistema de comunicaciones se comporta como el de la figura



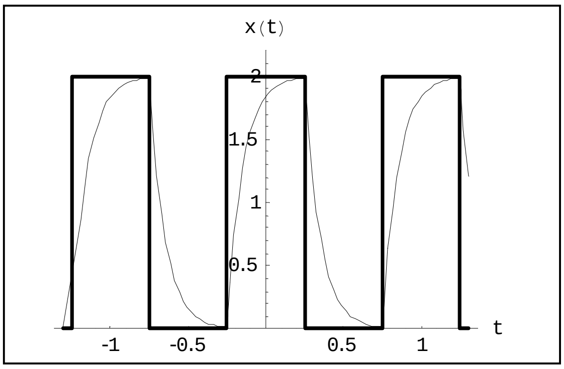
Si la entrada estuviese formada por una secuencia alternada de ceros y unos, la señal tendría la forma de una onda cuadrada como la de la figura

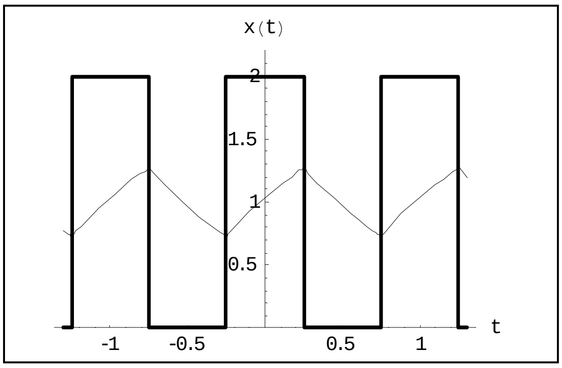


En ese caso, la salida sería la correspondiente a un circuito RC en el que, en un caso general, no tendrían por qué alcanzarse los valores máximos y mínimos (el condensador no se llega a cargar completamente a las tensiones de alimentación porque la constante de tiempo del circuito RC es mayor que el semiperíodo de la señal). Una representación típica de la situación se recoge en la figura siguiente:

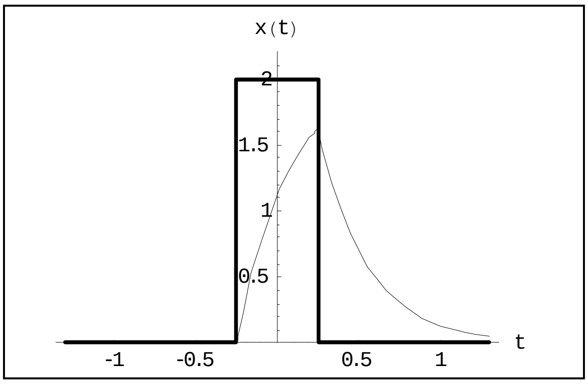


En esta situación, vemos que la señal de salida del sistema está centrada en el valor medio de la entrada, que en nuestro caso se corresponde con la de la tensión umbral de decisión. Esto se aprecia claramente para otras constantes de tiempo del circuito, tal como aparecen en las figuras siguientes (ver apéndice al problema)

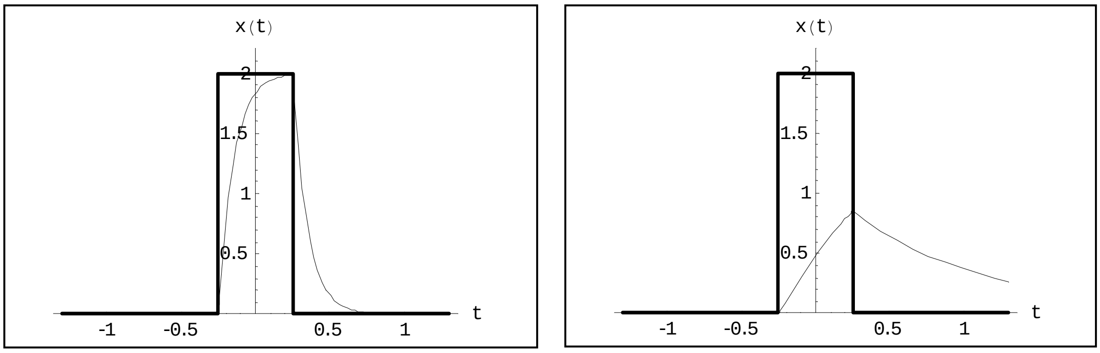




En todos estos casos, pues, la detección del valor umbral es correcta. Sin embargo esta situación cambia cuando la señal contiene una secuencia larga de ceros seguida de un uno y posteriormente de nuevo uno o varios ceros (es equivalente también la situación simétrica: secuencia larga de unos, seguida de un cero y posteriormente uno o varios unos). La nueva situación se refleja en el gráfico siguiente:



Vemos como, ahora, la señal de salida no está centrada en el valor medio de la entrada (tensión de umbral). Esto puede provocar situaciones en las que no se supere dicha tensión umbral. Esto se aprecia claramente en los gráficos siguientes para distintos valores de la constante de tiempo del circuito RC.



La condición que debe cumplir pues el ancho del pulso es que permita a la señal de salida alcanzar el valor de la tensión umbral. Sea un pulso de alto A y ancho d. La tensión de salida vale inicialmente cero y, en la fase de subida se comporta de acuerdo con la ecuación

$$y(t) = K_1 + K_2 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0; \quad y(\infty) = A$$

podemos calcular las constantes

$$\begin{cases} y(0) = 0 = K_1 + K_2 e^{-\frac{0}{RC}} = K_1 + K_2 \\ y(\infty) = A = K_1 + K_2 e^{-\frac{\infty}{RC}} = K_1 \end{cases}$$

De aquí se deduce que

$$K_1 = A$$
$$K_2 = -A$$

y sustituyendo en la ecuación obtenemos que la salida es

$$y(t) = K_1 + K_2 e^{-\frac{t}{RC}} = A - Ae^{-\frac{t}{RC}}$$
$$y(t) = A\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

El valor que toma la tensión en el instante de finalización del pulso es

$$y(d) = A\left(1 - e^{-\frac{d}{RC}}\right)$$

y ese valor debe superar la tensión umbral. Por lo tanto la condición que debe cumplirse es

$$y(d) \geq \frac{A}{2}$$
$$A\left(1 - e^{-\frac{d}{RC}}\right) \geq \frac{A}{2}$$

$$1-e^{-\frac{d}{RC}} \geq \frac{1}{2}$$
$$e^{-\frac{d}{RC}} \leq \frac{1}{2}$$
$$-\frac{d}{RC} \leq Ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$d \geq -RCLn\left(\frac{1}{2}\right)$$

Tenemos ahora el problema de determinar el valor de *RC*. El dato que nos ofrece el problema es el ancho de banda del sistema, por lo que tendremos que calcular dicho ancho de banda. Para ello empecemos calculando la función de transferencia del circuito RC. En dicho circuito, llamando *i(t)* a la intensidad, se cumple que

$$x(t) = i(t)R + y(t)$$

La ecuación del condensador es

$$i(t) = C\frac{dy(t)}{dt}$$

Sustituyendo en la anterior

$$x(t) = RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

lo que se puede expresar también como

$$x(t) = RCDy(t) + y(t)$$
$$x(t) = [1 + RCD]y(t)$$

Recordando que la función de transferencia se puede calcular en función de los polinomios en D de la ecuación diferencial del sistema, podemos escribir

$$H(\omega) = \frac{P_A(j\omega)}{P_B(j\omega)} = \frac{1}{1+RCj\omega} = \frac{1}{1+j\omega RC}$$

El espectro de amplitud será

$$|H(\omega)| = \left|\frac{1}{1+j\omega RC}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}$$

Si suponemos que el ancho de banda se define, según el criterio habitual, como el ancho de banda de 3dB, tenemos

$$|H(\omega_{3dB})| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_{3dB}{}^2R^2C^2}} = 3dB = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{1+\omega_{3dB}{}^2R^2C^2} = \frac{1}{2}; \qquad 1+\omega_{3dB}{}^2R^2C^2 = 2; \qquad \omega_{3dB}{}^2 = \frac{1}{R^2C^2}$$

$$\boxed{\omega_{3dB} = \frac{1}{RC}}$$

Por otra parte

$$\omega_{3dB} = 2\pi B_{3dB} = \frac{1}{RC}$$

de donde podemos, finalmente, obtener el valor de *RC* en función del ancho de banda del sistema como

$$RC = \frac{1}{2\pi B_{3dB}}$$

Sustituyendo este resultado en la expresión del tamaño mínimo del ancho del pulso tenemos

$$d \geq -\frac{Ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2\pi B_{3dB}} = -\frac{Ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2\pi 10^6} = 0'11\mu seg$$

Apartado b)

Si el resultado anterior es el tiempo mínimo de duración de un bit, la velocidad máxima de transmisión de información, en bits por segundo, será

$$v = \frac{1}{d} \leq -\frac{2\pi B_{3dB}}{Ln\left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{2\pi 10^6}{Ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 9'065Mbps$$

Apartado c)

Para codificar 256 niveles se necesita *m=8 bits*. Luego:

$$SNR_{dB} = 4'6 + 6m = 4'6 + 6 \cdot 8 = 52'6dB$$

Apartado d)

Muestreando a 8KHz y codificando cada muestra en 8 bits, se envían

$$8\frac{bits}{muestra} \cdot 8000\frac{muestras}{seg} = 64Kbps$$

Como la velocidad máxima de transmisión de información por el canal es

$$v \leq 9'065Mbps$$

el número de máximo de canales que se pueden multiplexar se calcula como

$$n \cdot 64Kbps \leq v \leq 9'065Mbps$$

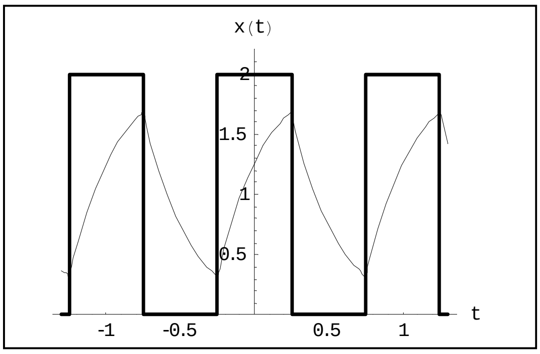
$$n \leq \frac{9'065Mbps}{64Kbps} = 141'6$$

Como el número de canales tiene que ser entero, tenemos que

$$n \leq 141$$

Apéndice

El trazado de figuras como la siguiente, requiere el cálculo de las ecuaciones de la respuesta al sistema cuando no se alcanzan los valores extremos de excitación de la señal.



Supongamos que el circuito RC se excita con una onda cuadrada como la de la figura con un valor mínimo de tensión de entrada de *A* voltios y un valor máximo de *B*. La tensión de salida evoluciona en una especie de diente de sierra con un valor mínimo de y_{min} y un valor máximo de y_{max}. Fijémonos en primer lugar en el tramo de subida de la señal de salida que, como en cualquier circuito RC, toma la forma

$$y_s(t_s) = K_1 + K_2 e^{-\frac{t_s}{RC}}$$

Con las condiciones iniciales

$$y_s(0) = y_{\min}; \quad y_s(\infty) = B$$

podemos establecer para las constantes

$$\begin{cases} y_s(0) = y_{\min} = K_1 + K_2 e^{-\frac{0}{RC}} = K_1 + K_2 \\ y_s(\infty) = B = K_1 + K_2 e^{-\frac{\infty}{RC}} = K_1 \end{cases}$$

De aquí se deduce que

$$K_1 = B$$
$$K_2 = y_{\min} - B$$

y sustituyendo en la ecuación obtenemos que la salida es

$$y_s(t_s) = K_1 + K_2 e^{-\frac{t_s}{RC}} = B + (y_{\min} - B) e^{-\frac{t_s}{RC}}$$

Fijémonos ahora en el tramo de bajada de la señal de salida que, igualmente, toma la forma

$$y_b(t_b) = K_3 + K_4 e^{-\frac{t_b}{RC}}$$

Con las condiciones iniciales

$$y_b(0) = y_{\max}; \quad y_b(\infty) = A$$

podemos establecer para las constantes

$$\begin{cases} y_b(0) = y_{\max} = K_3 + K_4 e^{-\frac{0}{RC}} = K_3 + K_4 \\ y_b(\infty) = A = K_3 + K_4 e^{-\frac{\infty}{RC}} = K_3 \end{cases}$$

De aquí se deduce que

$$K_3 = A$$

$$K_4 = y_{\max} - A$$

y sustituyendo en la ecuación obtenemos que la salida es

$$y_b(t_b) = K_3 + K_4 e^{-\frac{t_b}{RC}} = A + (y_{\max} - A)e^{-\frac{t_b}{RC}}$$

Únicamente nos falta, para tener completamente definida las ecuaciones de subida y bajada, la determinación de las constantes y_{min} e y_{max}. Si el ancho del pulso (el tiempo de cada bit) es d, podemos escribir que

$$\begin{cases} y_s(d) = y_{\max} \\ y_b(d) = y_{\min} \end{cases}$$

Sustituyendo tenemos

$$\begin{cases} y_s(d) = B + (y_{\min} - B)e^{-\frac{d}{RC}} = y_{\max} \\ y_b(d) = A + (y_{\max} - A)e^{-\frac{d}{RC}} = y_{\min} \end{cases}$$

Sustituyendo la primera en la segunda tenemos

$$y_{\min} = A + (y_{\max} - A)e^{-\frac{d}{RC}} = A + \left[\left(B + (y_{\min} - B)e^{-\frac{d}{RC}}\right) - A\right]e^{-\frac{d}{RC}}$$

Esta ecuación no tiene solución analítica pero puede resolverse sin dificultad por métodos numéricos. Una vez calculado el valor de y_{min} se puede calcular el valor de y_{max} mediante la siguiente expresión

$$y_{\max} = B + (y_{\min} - B)e^{-\frac{d}{RC}}$$

Si estos resultados los aplicamos a nuestro caso, tenemos que $A=0$ y que $B=2$. Si suponemos, por ejemplo, una duración de bit igual a la constante de tiempo del circuito ($d=RC$), tenemos que

$$y_{\min} = A + \left[\left(B + (y_{\min} - B)e^{-\frac{d}{RC}}\right) - A\right]e^{-\frac{d}{RC}} = 0 + \left[\left(2 + (y_{\min} - 2)e^{-1}\right) - 0\right]e^{-1}$$

$$y_{\min} = \left(2 + (y_{\min} - 2)e^{-1}\right)e^{-1}$$

$$y_{\min} = 2e^{-1} + (y_{\min} - 2)e^{-2}$$

La solución numérica de esa ecuación es

$$y_{\min} = 0'538$$

Para el valor máximo de la salida tenemos

$$y_{\max} = B + (y_{\min} - B)e^{-\frac{d}{RC}} = 2 + (0'538 - 2)e^{-1} = 1'462$$

Con ello, la ecuación de la señal de salida en el tramo de subida es

$$y_s(t_s) = B + (y_{\min} - B)e^{-\frac{t_s}{RC}} = 2 + (0'538 - 2)e^{-\frac{t_s}{RC}}$$

$$y_s(t_s) = 2 - 1'462e^{-\frac{t_s}{RC}}$$

Análogamente, para el tramo de bajada de la señal de salida tenemos

$$y_b(t_b) = A + (y_{\max} - A)e^{-\frac{t_b}{RC}} = 0 + (1'462 - 0)e^{-\frac{t_b}{RC}}$$

$$y_b(t_b) = 1'462e^{-\frac{t_b}{RC}}$$