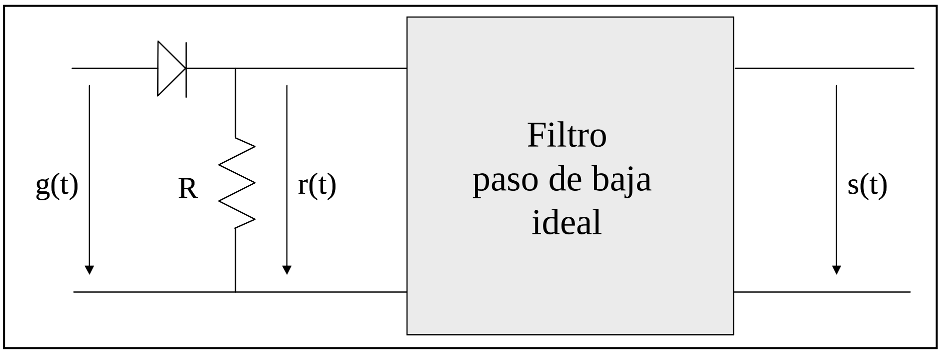
Problema PTC0003-39

Demostrar que el circuito de la figura (detector de envolvente) sirve para demodular señales de AM. Considerar el diodo ideal y la impedancia de entrada del circuito infinita, siendo

$$g(t) = K[1 + mf(t)]\cos\omega_c t$$



Solución PTC0003-39

Para demostrar que el circuito actúa de demodulador de señales de AM, tendremos que demostrar que su salida *s(t)* es proporcional a la señal modulante *f(t)*.

$$s(t) = k \cdot f(t)$$

Dado que conocemos el valor de la entrada del circuito *g(t)*, así como las características del mismo, podríamos tratar de hallar la salida *s(t)* operando, como se hace habitualmente, en el dominio de la frecuencia mediante la expresión

$$S(\omega) = G(\omega) \cdot H(\omega)$$

La dificultad en este caso reside en el hecho de que el circuito, al no ser lineal (contiene un diodo), carece de función de transferencia. Debemos pues abordar el problema de otra forma.

Considerando la actuación del diodo, vemos que la tensión de entrada al filtro *r(t)* será igual a la tensión de entrada del circuito *g(t)* cuando el diodo conduce, y cero cuando no conduce.

$$\text{Si el diodo conduce:} \quad r(t) = g(t)$$
$$\text{Si el diodo no conduce:} \quad r(t) = 0$$

Pero el diodo conduce cuando la tensión de entrada *g(t)* es mayor que cero. Por lo tanto

$$\forall \quad g(t) > 0 \quad \rightarrow \quad r(t) = g(t)$$
$$\forall \quad g(t) \le 0 \quad \rightarrow \quad r(t) = 0$$

Al ser la señal de entrada *g(t)* una señal modulada en amplitud, la condición de ser mayor que cero se cumplirá cuando la portadora sea mayor que cero.

$$\forall \quad \cos(\omega_c t) > 0 \quad \rightarrow \quad r(t) = g(t)$$
$$\forall \quad \cos(\omega_c t) \le 0 \quad \rightarrow \quad r(t) = 0$$

Denominemos *x(t)* a una señal cuadrada de valores *0* y *1* de la misma frecuencia que la portadora

$$\forall \quad \cos(\omega_c t) > 0 \quad \rightarrow \quad x(t) = 1$$
$$\forall \quad \cos(\omega_c t) \leq 0 \quad \rightarrow \quad x(t) = 0$$

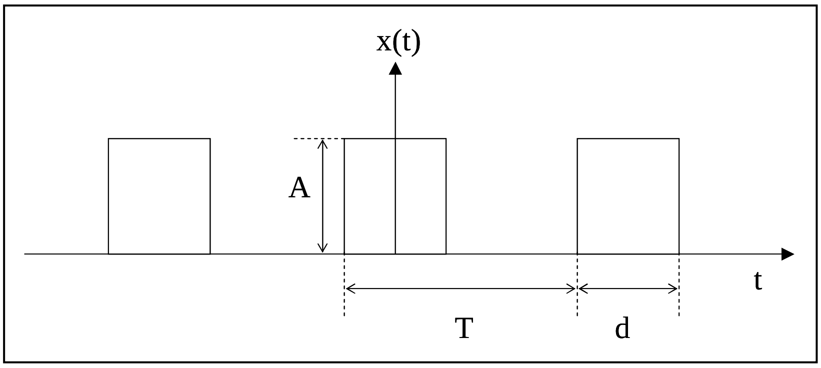
En ese caso se cumple que

$$\forall \quad \cos(\omega_c t) > 0 \quad \rightarrow \quad r(t) = g(t) \cdot 1 = g(t) \cdot x(t)$$
$$\forall \quad \cos(\omega_c t) \leq 0 \quad \rightarrow \quad r(t) = g(t) \cdot 0 = g(t) \cdot x(t)$$

es decir que, finalmente,

$$r(t) = g(t) \cdot x(t)$$

Para seguir avanzando debemos ahora calcular el desarrollo en serie trigonométrica de Fourier de la onda cuadrada *x(t)* como la de la figura.



En nuestro caso se cumple que

$$A = 1$$
$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega_c}$$
$$d = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_c}$$

Al ser *x(t)* una función periódica, admite un desarrollo en serie de Fourier de acuerdo con la expresión

$$x(t) = \frac{a_0}{T} + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(\omega_n t) + b_n sen(\omega_n t)\right]$$

en la que los distintos coeficientes se calculan de acuerdo con las relaciones siguientes:

$$a_0 = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \int_{-d/2}^{d/2} A dt = A[t]_{-d/2}^{d/2} = A\left[\frac{d}{2} - \frac{-d}{2}\right] = Ad = 1\frac{\pi}{\omega_c} = \frac{\pi}{\omega_c}$$

Para los términos en coseno tenemos

$$a_n = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(\omega_n t)dt = \int_{-d/2}^{d/2} A\cos(\omega_n t)dt = \frac{A}{\omega_n}\left[sen(\omega_n t)\right]_{-d/2}^{d/2}$$

$$a_n = \frac{A}{\omega_n}\left[sen\left(\frac{\omega_n d}{2}\right) - sen\left(\frac{-\omega_n d}{2}\right)\right] = \frac{A}{\omega_n}2sen\left(\frac{\omega_n d}{2}\right) = \frac{A}{\frac{2\pi n}{T}}2sen\left(\frac{\frac{2\pi n}{T}d}{2}\right)$$

$$a_n = \frac{AT}{n\pi}sen\left(\frac{n\pi d}{T}\right) = \frac{1\frac{2\pi}{\omega_c}}{n\pi}sen\left(\frac{n\pi\frac{T}{2}}{T}\right) = \frac{2}{n\omega_c}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Y para los términos en seno tenemos

$$b_n = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)sen(\omega_n t)dt = \int_{-d/2}^{d/2} Asen(\omega_n t)dt = \frac{-A}{\omega_n}\left[\cos(\omega_n t)\right]_{-d/2}^{d/2}$$

$$b_n = \frac{-A}{\omega_n}\left[\cos\left(\frac{\omega_n d}{2}\right) - \cos\left(\frac{-\omega_n d}{2}\right)\right] = 0$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes, tenemos que el desarrollo en serie de Fourier queda

$$x(t) = \frac{\frac{\pi}{\omega_c}}{T} + \frac{2}{\frac{2\pi}{\omega_c}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n\omega_c}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(n\omega_c t) + 0\cdot sen(n\omega_c t)\right]$$

$$x(t) = \frac{\pi}{T\frac{2\pi}{T}} + \frac{\omega_c}{\pi}\frac{2}{\omega_c}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(n\omega_c t)\right]$$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(n\omega_c t)\right]$$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\cos(\omega_c t) - \frac{1}{3}\cos(3\omega_c t) + \frac{1}{5}\cos(5\omega_c t) + \ldots\right]$$

Recordando ahora que

$$r(t) = g(t)\cdot x(t)$$

y sustituyendo tenemos

$$r(t) = g(t)\cdot\left\{\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\cos(\omega_c t) - \frac{1}{3}\cos(3\omega_c t) + \frac{1}{5}\cos(5\omega_c t) + \ldots\right]\right\}$$

$$r(t) = K[1 + mf(t)]\cos(\omega_c t)\cdot\left\{\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\cos(\omega_c t) - \frac{1}{3}\cos(3\omega_c t) + \frac{1}{5}\cos(5\omega_c t) + \ldots\right]\right\}$$

$$r(t) = \frac{1}{2}K[1 + mf(t)]\cos(\omega_c t) + \frac{2}{\pi}K[1 + mf(t)]\cos^2(\omega_c t) -$$

$$-\frac{2}{3\pi}K[1 + mf(t)]\cos(\omega_c t)\cos(3\omega_c t) + \frac{2}{5\pi}K[1 + mf(t)]\cos(\omega_c t)\cos(5\omega_c t) + \ldots$$

En la expresión anterior observamos que todos los términos, excepto el segundo, implican la modulación en amplitud de una portadora de frecuencias ω_c, $3\omega_c$, $5\omega_c$, etc., es decir, que su espectro estará centrado en las frecuencias de las correspondientes portadoras. Por ello, al filtrarlos paso de baja (con frecuencia de corte significativamente inferior a ω_c) resultarán eliminados.

Si denominamos $T_2(t)$ al segundo término de $r(t)$ tenemos que

$$T_2(t) = \frac{2}{\pi} K\left[1 + mf(t)\right]\cos^2(\omega_c t)$$

Recordando que

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$$

podemos escribir

$$T_2(t) = \frac{1}{2}\frac{2}{\pi} K\left[1 + mf(t)\right] + \frac{2}{\pi} K\left[1 + mf(t)\right]\frac{\cos(2\omega_c t)}{2}$$

$$T_2(t) = \frac{K}{\pi}\left[1 + mf(t)\right] + \frac{K}{\pi}\left[1 + mf(t)\right]\cos(2\omega_c t)$$

En la expresión anterior observamos que el segundo término implica la modulación en amplitud de una portadora de frecuencia $2\omega_c$, es decir, que su espectro estará centrado en dicha frecuencia. Por ello, al filtrarlo paso de baja (con frecuencia de corte significativamente inferior a ω_c) resultará eliminado. Por tanto, la salida del sistema $s(t)$ será

$$s(t) = \frac{K}{\pi}\left[1 + mf(t)\right] = \frac{K}{\pi} + \frac{Km}{\pi} f(t)$$

Vemos cómo la salida del sistema está compuesta por un término de continua y otro proporcional a la señal modulante. Queda, por tanto demostrado, el funcionamiento del sistema como demodulador de AM.

NOTA: Para obtener exactamente $f(t)$ sólo se tendría que añadir a la salida del sistema un filtro paso de alta (un condensador en serie) que elimine la componente de continua, y un amplificador lineal de ganancia

$$\frac{\pi}{Km}$$