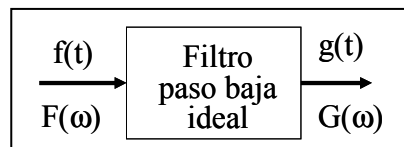


Problema PTC0003-42

Demostrar que no pueden existir filtros de paso de baja ideales.

Solución PTC0003-42

Vamos a demostrar la inexistencia de los filtros paso de baja ideales mediante el método de reducción al absurdo, es decir, supondremos que sí existen y deduciremos de ello unas consecuencias absurdas, lo que demostrarán la imposibilidad de la hipótesis de partida (la existencia de los mencionados filtros ideales). Supongamos un filtro paso de baja ideal como el de la figura



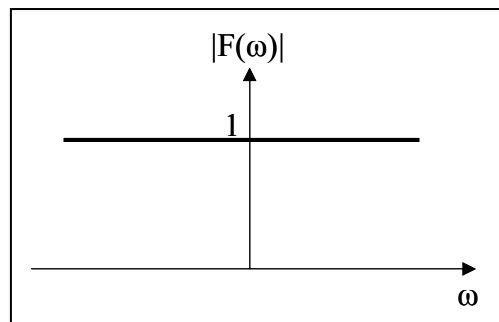
Supongamos que inyectamos a la entrada una señal delta de Dirac

$$f(t) = \delta(t)$$

cuya transformada de Fourier sabemos que vale

$$F(\omega) = 1$$

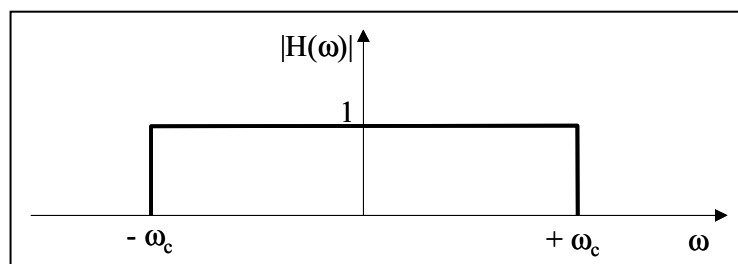
cuya representación gráfica es



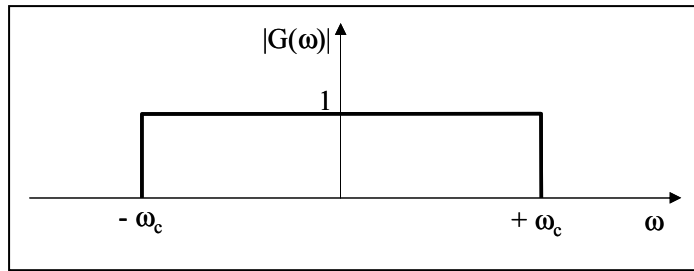
La salida del filtro se puede calcular, en el dominio de la frecuencia, mediante la expresión

$$G(\omega) = F(\omega) \cdot H(\omega)$$

siendo $H(\omega)$ la función de transferencia del filtro que gráficamente toma la forma siguiente



Gráficamente, el espectro de amplitud de la salida será



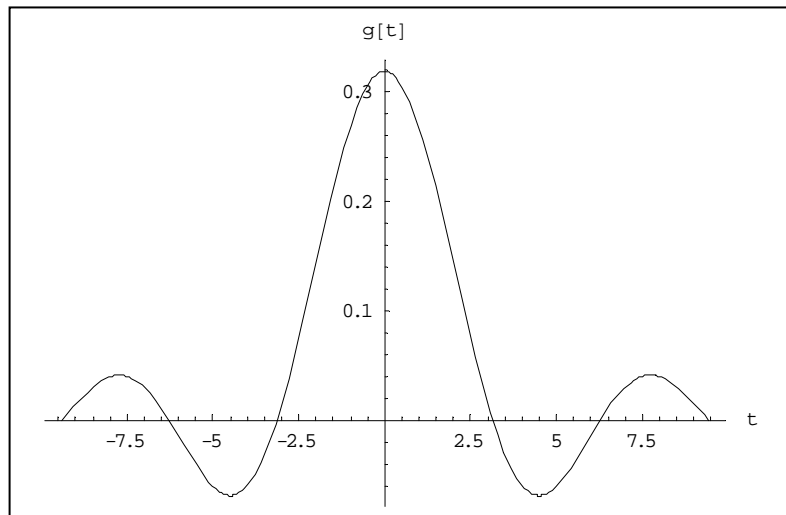
Con este resultado podemos calcular la representación temporal de la señal de salida mediante la expresión

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi j t} [e^{j\omega t}]_{-\omega_c}^{\omega_c}$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j t} [e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}] \frac{2j}{2j} = \frac{1}{\pi} \text{sen}(\omega_c t) \frac{\omega_c t}{\omega_c t}$$

$$g(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t)$$

Gráficamente, la salida del filtro es



Podemos observar cómo $g(t)$ es distinta de cero para valores negativos de t , lo que indica que el filtro responde al pulso de entrada $f(t)$ **antes** de que éste ocurra (en $t=0$). Es, por tanto, un sistema no causal: produce el efecto **antes** de que se produzca la causa. O dicho de otra forma, el filtro adivina el futuro porque empieza a responder antes de que se le excite. En conclusión, como los sistemas no causales (los que adivinan el futuro) no son posibles, tampoco lo son los filtros paso de baja ideales.

NOTA: Si el filtrado no se realizase en tiempo real sino que, por ejemplo, se captura toda la información de la señal de entrada y, posteriormente, se realiza un proceso de filtrado, entonces sí es posible realizar un filtrado paso de baja ideal, porque ya se conoce previamente toda la evolución de la señal de entrada. No hay, en este caso, adivinación del futuro.