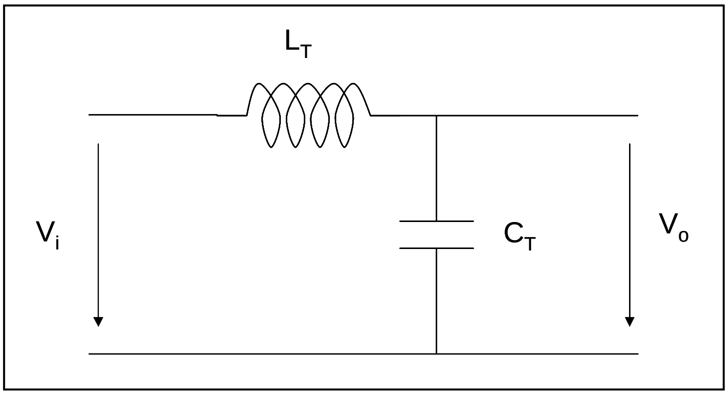
Problema PTC0003-43

Un cable de corta longitud y resistencia despreciable puede modelarse según el circuito de la figura.

a) Determinar y dibujar su función de transferencia sin utilizar fasores.
b) Calcular el valor máximo de dicha función de transferencia y la frecuencia a la que se produce.
c) Explicar qué ocurre si se excita el cable anterior con una tensión sinusoidal, a la frecuencia anteriormente calculada, proporcionada por una fuente convencional de laboratorio.



Solución PTC0003-43

Apartado a)

Comencemos en primer lugar por plantear las ecuaciones diferenciales que modelan el comportamiento del cable en el dominio del tiempo. La intensidad por el condensador será

$$i_C(t) = C_T \frac{dv_o(t)}{dt}$$

Por otra parte, la tensión en la bobina es

$$v_L(t) = L_T \frac{di_L(t)}{dt}$$

Al estar la salida del circuito abierta, la impedancia de la carga es infinita y la intensidad que circula por ella es nula, por lo que las intensidades por la bobina y por el condensador son iguales

$$i(t) = i_C(t) = i_L(t)$$

Aplicando el cálculo de tensiones en el circuito tenemos

$$v_i(t) = v_L(t) + v_o(t)$$

y sustituyendo

$$v_i(t) = L_T \frac{di(t)}{dt} + v_o(t) = L_T \frac{d}{dt}\left(C_T \frac{dv_o(t)}{dt} \right) + v_o(t)$$

$$v_i(t) = L_T C_T \frac{d^2 v_o(t)}{dt^2} + v_o(t)$$

Esta ecuación es la que modela el comportamiento temporal del circuito. Para calcular la función de transferencia vamos a seguir dos caminos alternativos.

Alternativa 1. En primer lugar vamos a calcular la función de transferencia recordando la expresión

$$H(\omega) = \frac{P_A(j\omega)}{P_B(j\omega)}$$

donde los polinomios P_A y P_B son los que aparecen en la ecuación diferencial que modela el comportamiento temporal del sistema, de acuerdo con

$$P_A(D)x(t) = P_B(D)y(t)$$

En nuestro caso, el comportamiento temporal se puede expresar como

$$v_i(t) = \left(L_T C_T D^2 + 1\right)v_o(t)$$

por lo que los polinomios son

$$\begin{cases} P_A(D) = 1 \\ P_B(D) = L_T C_T D^2 + 1 \end{cases}$$

Sustituyendo en la expresión de la función de transferencia tenemos

$$H(\omega) = \frac{P_A(j\omega)}{P_B(j\omega)} = \frac{1}{L_T C_T (j\omega)^2 + 1}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - L_T C_T \omega^2}$$

Alternativa 2. Otra forma de calcular la función de transferencia es aplicar la transformada de Fourier a la expresión que rige el comportamiento temporal del circuito.

$$\mathcal{F}[v_i(t)] = \mathcal{F}\left[L_T C_T \frac{d^2 v_o(t)}{dt^2} + v_o(t)\right] = \mathcal{F}\left[L_T C_T \frac{d^2 v_o(t)}{dt^2}\right] + \mathcal{F}[v_o(t)]$$

$$\mathcal{F}[v_i(t)] = L_T C_T \mathcal{F}\left[\frac{d^2 v_o(t)}{dt^2}\right] + \mathcal{F}[v_o(t)]$$

Recordando que

$$\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega F(\omega)$$

y que, por tanto,

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = \mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{df(t)}{dt}\right)\right] = j\omega \mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = (j\omega)^2 F(\omega) = -\omega^2 F(\omega)$$

podemos sustituir y obtener

$$V_i(\omega) = -L_T C_T \omega^2 V_o(\omega) + V_o(\omega)$$

$$V_i(\omega) = \left(1 - L_T C_T \omega^2\right)V_o(\omega)$$

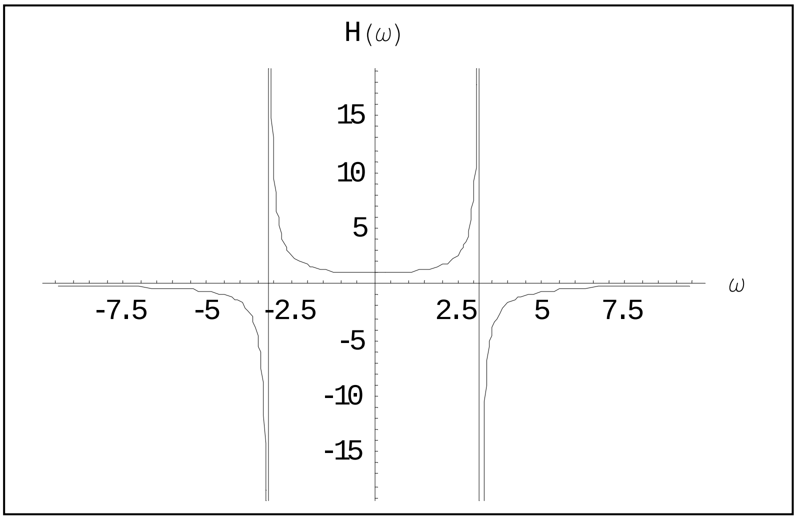
por lo que, finalmente, la función de transferencia se calcula como

$$H(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)} = \frac{1}{1 - L_T C_T \omega^2}$$

que, naturalmente, coincide con el valor calculado por el método anterior.

Apartado b)

La función de transferencia anteriormente calculada es una función real (sin parte imaginaria). Su representación gráfica es la siguiente



El valor máximo vemos que es infinito. Determinémoslo analíticamente calculando el valor para el que se anula el denominador de la función de transferencia

$$H(\omega)\big|_{\omega=\omega_m} = \infty$$

$$H(\omega)\big|_{\omega=\omega_m} = \left.\frac{1}{1-L_T C_T \omega^2}\right|_{\omega=\omega_m} = \frac{1}{1-L_T C_T \omega_m^2} = \infty$$

$$1-L_T C_T \omega_m^2 = 0$$

lo que, finalmente, nos da el valor de frecuencia para el que la función de transferencia es máxima

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{L_T C_T}}$$

$$f_m = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_T C_T}}$$

Apartado c)

Si excitamos el cable con una tensión senoidal a la frecuencia anterior (denominada frecuencia de resonancia) nos encontramos con que el sistema presentará una función de transferencia de valor infinito. Ello implicará que la salida $v_o(t)$ es infinitas veces mayor que la entrada $v_i(t)$. Como la salida $v_o(t)$ tiene que ser un valor finito, la única posibilidad es que la entrada $v_i(t)$ sea cero. Ello implica que el cable se comporta como un cortocircuito.

Al conectar una fuente convencional de laboratorio a un cortocircuito observaremos que la intensidad estará limitada por la resistencia interna de la fuente (o por los limitadores de intensidad si los tuviese) y que la tensión a la salida de la fuente será cero.