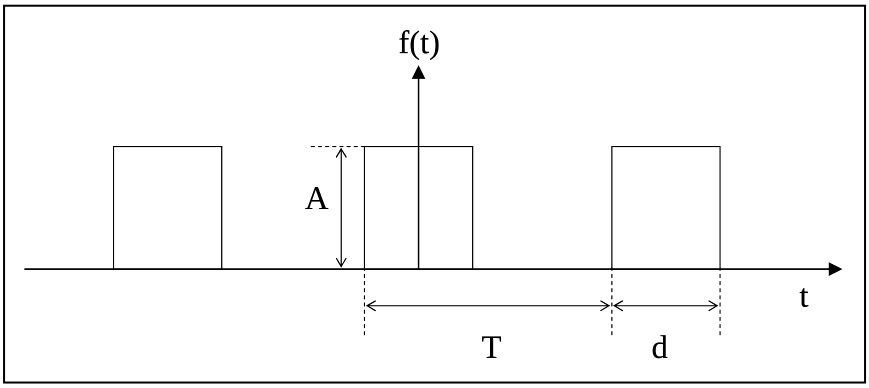
Problema PTC0003-44

Determinar a qué velocidad hay que muestrear la señal de la figura para que no resulte alterado:

a) El 100% de la potencia de la señal.
b) El 90%.
c) El 80%.

Datos: A= 1 Voltio. T= 1 ms. d= 200 µs.



Solución PTC0003-44

Apartado a)

La frecuencia de muestreo deberá ser, como mínimo, igual al doble de la frecuencia de la componente espectral de mayor frecuencia de la señal original. Por ello debemos comenzar por calcular el espectro de la señal. Al ser *f(t)* una función periódica, admite un desarrollo en serie de Fourier de acuerdo con la expresión

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

en la que los coeficientes se calculan de acuerdo con:

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

En nuestro caso tenemos

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_n t} dt = \int_{-d/2}^{d/2} A e^{-j\omega_n t} dt$$

$$c_n = \frac{-A}{j\omega_n}\left[e^{-j\omega_n t}\right]_{-d/2}^{d/2} = \frac{-A}{j\omega_n}\left[e^{-j\omega_n \frac{d}{2}} - e^{j\omega_n \frac{d}{2}}\right]$$

$$c_n = \frac{A}{j\omega_n}\left[e^{j\omega_n \frac{d}{2}} - e^{-j\omega_n \frac{d}{2}}\right]\frac{2j}{2j} = \frac{A}{j\omega_n} 2 j sen\left(\omega_n \frac{d}{2}\right)$$

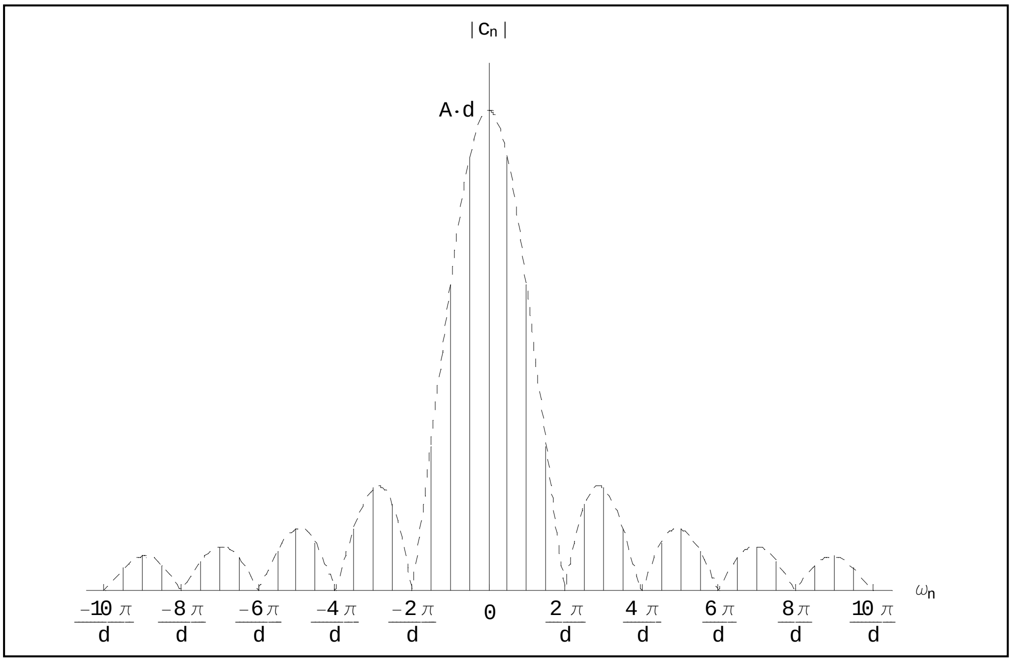
$$c_n = \frac{2A}{\omega_n} sen\left(\omega_n \frac{d}{2}\right)\frac{\omega_n d/2}{\omega_n d/2}$$

$$c_n = AdSa\left(\omega_n \frac{d}{2}\right)$$

Considerando el espectro de amplitud como aquél que se deriva de las contantes c_n tenemos

$$|c_n| = \left|AdSa\left(\omega_n \frac{d}{2}\right)\right| = Ad\left|Sa\left(\omega_n \frac{d}{2}\right)\right|$$

que gráficamente se representa como



Vemos que la señal original tiene componentes espectrales para todas las frecuencias por lo que, si se desea conservar el 100% de la señal, la velocidad de muestreo debe ser infinita (algo prácticamente irrealizable).

Apartado b)

Sabemos que la potencia de la señal toma la forma

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-d/2}^{d/2} A^2 dt = \frac{A^2}{T}[t]_{-d/2}^{d/2} = \frac{A^2}{T}\left(\frac{d}{2} - \frac{-d}{2}\right)$$

$$P = \frac{A^2 d}{T}$$

Por otra parte, para el caso que nos ocupa, la potencia de la señal podemos también escribirla en función de sus componentes espectrales como

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{T^2}$$

Si filtramos la señal original y nos quedamos con los k primeros armónicos, entonces la potencia de la señal filtrada será

$$P_k = \sum_{n=-k}^{k} P_n = \sum_{n=-k}^{k} \frac{|c_n|^2}{T^2}$$

Si estamos dispuestos a perder por efecto del filtrado (necesario para el posterior muestreo y recuperación) un porcentaje *R* de la potencia de la señal original, podemos escribir que la relación que se debe cumplir es

$$\frac{P_k}{P_n} \geq R$$

$$\frac{\sum_{n=-k}^{k} \frac{|c_n|^2}{T^2}}{\frac{A^2 d}{T}} = \frac{\sum_{n=-k}^{k} \frac{\left(Ad \left| Sa\left(\omega_n \frac{d}{2} \right) \right| \right)^2}{T^2}}{\frac{A^2 d}{T}} \geq R$$

$$\frac{\frac{A^2 d^2}{T^2}}{\frac{A^2 d}{T}} \sum_{n=-k}^{k} \left| Sa\left(\omega_n \frac{d}{2} \right) \right|^2 \geq R$$

$$\frac{d}{T} \sum_{n=-k}^{k} \left| Sa\left(\omega_n \frac{d}{2} \right) \right|^2 \geq R$$

Los valores de esta relación podemos tabularlos en función del número *k* de armónicos conservados y obtenemos la siguiente tabla

k	$\frac{P_k}{P}$
0	0,2
1	0,55
2	0,78
3	0,88
4	0,9028

De acuerdo con esos valores, para que la señal filtrada (y después muestreada y recuperada) conserve un 90% de la potencia de la señal original, deben conservarse los armónicos hasta el valor de *k=4*. La frecuencia de este armónico es

$$f_k = k\frac{1}{T} = 4 \cdot \frac{1}{1ms} = 4KHz$$

Por tanto la frecuencia de muestreo necesaria será

$$f_s = 2 \cdot f_k = 8KHz$$

Apartado c)

En el caso de querer conservar un 80% de la potencia de la señal original, deben conservarse los armónicos hasta el valor de *k=3*. La frecuencia de este armónico es

$$f_k = k\frac{1}{T} = 3 \cdot \frac{1}{1ms} = 3KHz$$

Por tanto la frecuencia de muestreo necesaria será de *6KHz*.