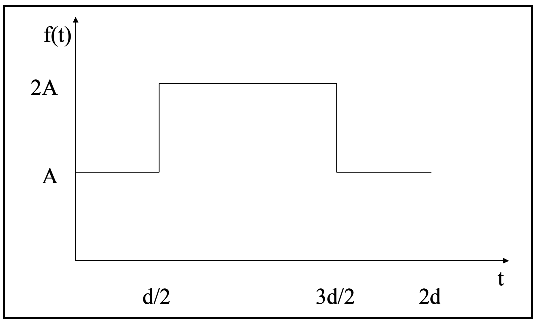
Problema PTC0004-02

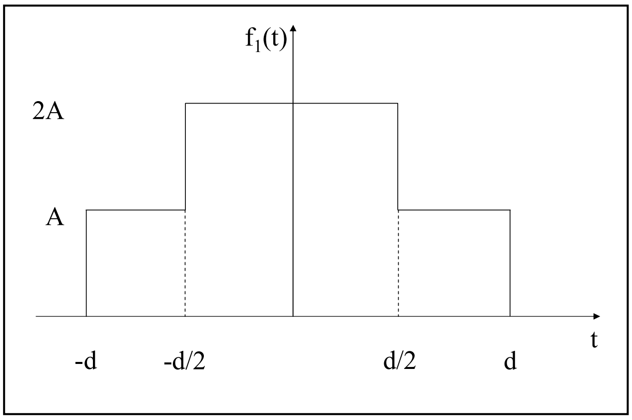
Para la función f(t) de la figura, determinar la frecuencia o frecuencias con componente espectral nulo.



Solución PTC0004-02

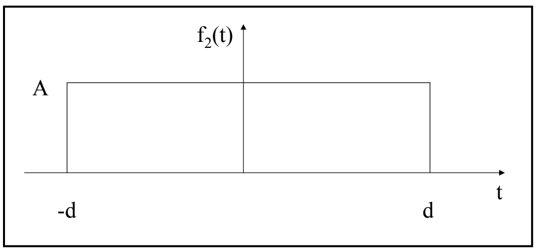
La función f(t) es igual a la función $f_1(t)$ desplazada a la derecha

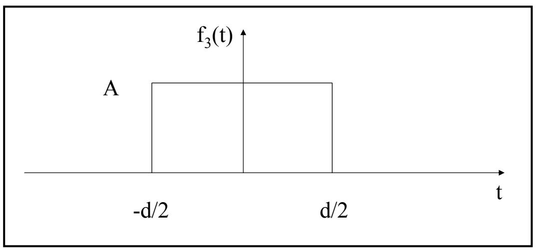
$$f(t) = f_1(t-d)$$



Esta función a su vez es la suma de $f_2(t)$ y $f_3(t)$

$$f_1(t) = f_2(t) + f_3(t)$$





De estas dos últimas funciones es fácil conocer su transformada de Fourier ya que son pulsos cuadrados. En efecto

$$F_3(\omega) = A \cdot d \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot d}{2}\right)$$

y

$$F_2(\omega) = A \cdot 2d \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot 2d}{2}\right) = A \cdot 2d \cdot Sa(\omega \cdot d)$$

Por tanto

$$F_1(\omega) = F_2(\omega) + F_3(\omega) = A \cdot 2d \cdot Sa(\omega \cdot d) + A \cdot d \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot d}{2}\right)$$

y, por último,

$$F(\omega) = e^{-j\omega d} F_1(\omega) = e^{-j\omega d}\left[A \cdot 2d \cdot Sa(\omega \cdot d) + A \cdot d \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot d}{2}\right)\right]$$

El espectro se anula, cuando se anula el espectro de amplitud, por lo que estudiaremos solamente la amplitud de la transformada

$$|F(\omega)| = \left|e^{-j\omega d}\right| \cdot \left|A \cdot 2d \cdot Sa(\omega \cdot d) + A \cdot d \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot d}{2}\right)\right| = \left|A \cdot 2d \cdot Sa(\omega \cdot d) + A \cdot d \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot d}{2}\right)\right|$$

$$|F(\omega)| = A \cdot 2d \cdot Sa(\omega \cdot d) + A \cdot d \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot d}{2}\right) = A \cdot d \cdot \left[2 \cdot Sa(\omega \cdot d) + Sa\left(\frac{\omega \cdot d}{2}\right)\right]$$

Las frecuencias para las que se anula el espectro deben cumplir

$$|F(\omega_c)| = 0$$

$$A \cdot d \cdot \left[2 \cdot Sa(\omega_c \cdot d) + Sa\left(\frac{\omega_c \cdot d}{2}\right)\right] = 0$$

$$2 \cdot Sa(\omega_c \cdot d) + Sa\left(\frac{\omega_c \cdot d}{2}\right) = 0$$

$$2 \cdot \frac{sen(\omega_c \cdot d)}{\omega_c \cdot d} + \frac{sen\left(\frac{\omega_c \cdot d}{2}\right)}{\frac{\omega_c \cdot d}{2}} = 0$$

$$2 \cdot \frac{sen\left(2\frac{\omega_c \cdot d}{2}\right)}{2\frac{\omega_c \cdot d}{2}} + \frac{sen\left(\frac{\omega_c \cdot d}{2}\right)}{\frac{\omega_c \cdot d}{2}} = 0$$

$$\frac{sen\left(2\frac{\omega_c \cdot d}{2}\right) + sen\left(\frac{\omega_c \cdot d}{2}\right)}{\frac{\omega_c \cdot d}{2}} = 0$$

Para cualquier valor de la frecuencia distinto de cero, se cumple

$$sen\left(2\frac{\omega_c \cdot d}{2}\right) + sen\left(\frac{\omega_c \cdot d}{2}\right) = 0 \quad \forall \omega_c \neq 0$$

$$2 \cdot sen\left(\frac{\omega_c \cdot d}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_c \cdot d}{2}\right) + sen\left(\frac{\omega_c \cdot d}{2}\right) = 0 \quad \forall \omega_c \neq 0$$

$$sen\left(\frac{\omega_c \cdot d}{2}\right)\left[2 \cdot \cos\left(\frac{\omega_c \cdot d}{2}\right) + 1\right] = 0 \quad \forall \omega_c \neq 0$$

Esta ecuación tiene dos posibles soluciones

$$\begin{cases} sen\left(\dfrac{\omega_c \cdot d}{2}\right) = 0 \quad \forall \omega_c \neq 0 \\ 2 \cdot \cos\left(\dfrac{\omega_c \cdot d}{2}\right) + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \cos\left(\dfrac{\omega_c \cdot d}{2}\right) = \dfrac{-1}{2} \quad \forall \omega_c \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\omega_c \cdot d}{2} = k\pi \quad \forall \omega_c \neq 0 \\ \dfrac{\omega_c \cdot d}{2} = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi = \left(\dfrac{6k+2}{3}\right)\pi \\ \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi = \left(\dfrac{6k+4}{3}\right)\pi \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_c = \dfrac{2k\pi}{d} \quad \rightarrow \quad f_c = \dfrac{k}{d} \quad \forall k \neq 0 \\ \omega_c = \begin{cases} \left(\dfrac{6k+2}{3}\right)\pi \\ \left(\dfrac{6k+4}{3}\right)\pi \end{cases} \quad \rightarrow \quad f_c = \begin{cases} \left(\dfrac{6k+2}{3}\right)\dfrac{1}{d} \\ \left(\dfrac{6k+4}{3}\right)\dfrac{1}{d} \end{cases} \quad \forall k \end{cases}$$

En resumen, el espectro se anula para los valores

$$f_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{d}, 1 \cdot \frac{1}{d}, \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{d}, 2 \cdot \frac{1}{d}, \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{d}, 3 \cdot \frac{1}{d}, \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{d}, \cdots$$