Problema PTC0004-03

Un tren de pulsos cuadrados es introducido en un analizador de espectros. En la pantalla se visualiza el espectro de amplitud de la señal, apareciendo:

- en horizontal, las distintas frecuencias espectrales en Khz.,
- y en vertical, la amplitud de la componente espectral, expresada en dB sobre el valor de la máxima componente espectral.

Los resultados obtenidos presentan, sobre un valor general de –40dB, algunos valores significativos que se recogen en la siguiente tabla:

kHz	1	3	5	7	9	11	13	15
dB	0	-9'1	-13'6	-17'0	-19'3	-21'5	-22'6	-24'1

Teniendo en cuenta los posibles errores experimentales determinar:

a) La frecuencia de la señal cuadrada.
b) El porcentaje de tiempo que dura el pulso cuadrado (duty-cycle).
c) Si existe algún valor incorrecto en todos o algunos de los valores de la tabla anterior, indicando, en su caso, a qué puede ser debido.

Solución PTC0004-03

Apartado a)

Una función *f(t)* periódica como el tren de pulsos del enunciado se puede desarrollar en serie de Fourier como

$$f(t) = \frac{k_0}{T} + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

En el caso del tren de pulsos cuadrados de alto A y ancho d, es fácil demostrar que los valores de los coeficientes son

$$k_0 = A \cdot d$$

$$k_n = A \cdot d \cdot Sa\left(\frac{\omega_n \cdot d}{2}\right)$$

Puesto que el primer componente armónico se produce a la frecuencia de 1kHz tenemos que

$$\omega_1 = \frac{2\pi \cdot 1}{T} = 2\pi \cdot 1kHz \quad \rightarrow \quad T = 1ms$$

o, lo que es lo mismos, la frecuencia de la señal cuadrada es de *1kHz*.

Apartado b)

El primer cruce por cero del espectro de amplitud, es decir, la primera vez que se anula el espectro, se produce para una valor n_c tal que

$$k_{n_c} = A \cdot d \cdot Sa\left(\frac{\omega_{n_c} \cdot d}{2}\right) = 0$$

$$Sa\left(\frac{\omega_{n_c} \cdot d}{2}\right) = Sa\left(\frac{2\pi \cdot n_c \cdot d}{2T}\right) = 0$$

$$\frac{2\pi \cdot n_c \cdot d}{2T} = \pi$$

de donde finalmente obtenemos

$$n_c = \frac{T}{d}$$

De la tabla de valores espectrales vemos que existe el armónico de 1 kHz y el de 3 kHz pero no el de 2kHz. Puesto que deben existir armónicos a todas las frecuencias múltiplos de la frecuencia fundamental, en este caso 1 kHz, también debería haber un componente a 2 kHz. Si no existe será porque es nulo, siendo éste el primero de los componentes que se anula, es decir, $n_c = 2$, de donde

$$d = \frac{T}{n_c} = \frac{T}{2} = 0'5ms$$

El porcentaje que dura el pulso cuadrado (duty-cycle) es, por tanto, del 50%.

Apartado c)

Lo que se observa en el osciloscopio no es el valor de los k_n, sino de la amplitud de cada armónico, es decir, de

$$x_n = \left| \frac{2}{T} k_n \right|$$

Este valor además está expresado no en términos absolutos, sino en valor relativo, expresada en dB, sobre el valor de la máxima componente espectral. Por la propia tabla vemos que la máxima componente espectral que se usa de referencia es la de la frecuencia fundamental (se está despreciando el efecto de la componente de continua). En este caso, los valores que aparecen en la tabla se corresponden con

$$y_n = 20\log\frac{x_n}{x_1} = 20\log\frac{\left|\frac{2}{T}k_n\right|}{\left|\frac{2}{T}k_1\right|} = 20\log\left|\frac{k_n}{k_1}\right|$$

$$y_n = 20\log\left|\frac{A \cdot d \cdot Sa\left(\frac{\omega_n \cdot d}{2}\right)}{A \cdot d \cdot Sa\left(\frac{\omega_1 \cdot d}{2}\right)}\right|$$

$$y_n = 20\log\left|\frac{sen\left(\frac{\omega_n \cdot d}{2}\right)}{\frac{\omega_n \cdot d}{2}} \frac{\frac{\omega_1 \cdot d}{2}}{sen\left(\frac{\omega_1 \cdot d}{2}\right)}\right|$$

$$y_n = 20\log\left|\frac{sen\left(\frac{2\pi n \cdot d}{2T}\right)}{\frac{2\pi n \cdot d}{2T}} \frac{\frac{2\pi \cdot d}{2T}}{sen\left(\frac{2\pi \cdot d}{2T}\right)}\right|$$

Sustituyendo el valor de d obtenido anteriormente

$$y_n = 20\log\left|\frac{sen\left(\frac{\pi n}{T}\frac{T}{2}\right)}{\frac{\pi n}{T}\frac{T}{2}}\frac{\frac{\pi}{T}\frac{T}{2}}{sen\left(\frac{\pi}{T}\frac{T}{2}\right)}\right|$$

$$y_n = 20\log\left|\frac{sen\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}}{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right|$$

$$y_n = 20\log\left|\frac{1}{n}sen\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

n/f_n (kHz)	1	3	5	7	9	11	13	15
y_n teórico (dB)	0	-9’54	-13’98	-16’90	-19’08	-20’83	-22’28	-23’52
y_n experimental (dB)	0	-9’1	-13’6	-17’0	-19’3	-21’5	-22’6	-24’1

Existe una buena concordancia entre los valores teóricos esperados y los experimentales obtenidos, siendo atribuibles los mismos a errores experimentales.