Problema PTC0004-05

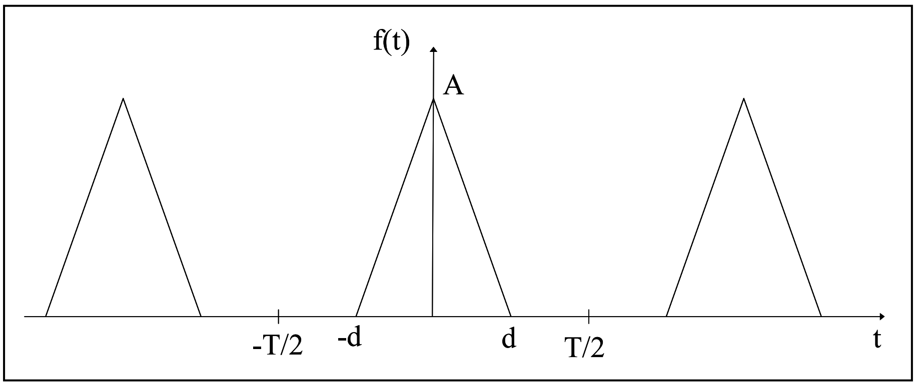
a) Obtener el espectro de amplitud de un onda triangular centrada en el origen de amplitud *A* , ancho *2d*, y período *T*.

b) Calcular los armónicos para el caso de que *T=2d* y *A=1*.

Solución PTC0004-05

Apartado a)

La onda triangular constituye una función periódica *f(t)* de la forma



Al ser *f(t)* una función periódica, admite un desarrollo en serie de Fourier de acuerdo con la expresión

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

en la que los coeficientes se calculan de acuerdo con:

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

La señal *f(t)* en el intervalo que no es nula, puede considerarse compuesta por dos rectas independientes que se corresponderían con las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$. Por lo tanto,

$$c_n = \int_{-T/2}^{-d} 0 e^{-j\omega_n t} dt + \int_{-d}^{0} f_1(t) e^{-j\omega_n t} dt + \int_{0}^{d} f_2(t) e^{-j\omega_n t} dt + \int_{d}^{T/2} 0 e^{-j\omega_n t} dt$$

Las rectas $f_1(t)$ y $f_2(t)$ pueden calcularse fácilmente pues se conocen los puntos por los que pasan. Recordando que la ecuación de una recta que pasa por dos puntos es

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

o, lo que es lo mismo,

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Para la primera de las rectas, que pasa por los puntos *[-d,0]* y *[0,A]*, tenemos

$$f_1(t) = 0 + \frac{A - 0}{0 - (-d)}(t + d) = \frac{A}{d}(t + d)$$

$$f_1(t) = A + \frac{A}{d}t$$

Para la segunda recta podemos escribir

$$f_2(t) = A + \frac{0 - A}{d - 0}(t - 0) = A - \frac{A}{d}t$$

Con estos resultados podemos escribir de nuevo el coeficiente como

$$c_n = \int_{-d}^{0}\left(A + \frac{A}{d}t\right)e^{-j\omega_n t}dt + \int_{0}^{d}\left(A - \frac{A}{d}t\right)e^{-j\omega_n t}dt$$

$$c_n = \int_{-d}^{0} Ae^{-j\omega_n t}dt + \int_{-d}^{0}\frac{A}{d}te^{-j\omega_n t}dt + \int_{0}^{d} Ae^{-j\omega_n t}dt - \int_{0}^{d}\frac{A}{d}te^{-j\omega_n t}dt$$

Agrupando términos

$$c_n = A\int_{-d}^{d} e^{-j\omega_n t}dt + \frac{A}{d}\int_{-d}^{0} te^{-j\omega_n t}dt - \frac{A}{d}\int_{0}^{d} te^{-j\omega_n t}dt$$

Para simplicidad de la resolución denominemos c_{n1}, c_{n2} y c_{n3} respectivamente a cada una de las integrales anteriores. De esta forma

$$c_n = c_{n1} + c_{n2} + c_{n3}$$

Resolvamos ahora cada una de ellas. Para la primera tenemos

$$c_{n1} = A\int_{-d}^{d} e^{-j\omega_n t}dt = \frac{A}{-j\omega_n}\left[e^{-j\omega_n t}\right]_{-d}^{d} = \frac{A}{-j\omega_n}\left(e^{-j\omega_n d} - e^{+j\omega_n d}\right)$$

$$c_{n1} = \frac{A}{j\omega_n}\left(e^{j\omega_n d} - e^{-j\omega_n d}\right)$$

En el caso de la segunda integral podemos escribir

$$c_{n2} = \frac{A}{d}\int_{-d}^{0} te^{-j\omega_n t}dt$$

Esa integral no es inmediata de resolver. Abordémosla por partes, haciendo los siguientes cambios de variables

$$u = t \quad \Rightarrow \quad du = dt$$

$$dv = e^{-j\omega_n t}dt \quad \Rightarrow \quad v = \frac{e^{-j\omega_n t}}{-j\omega_n}$$

Recordando que en la integración por partes

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

podemos sustituir

$$c_{n2} = \frac{A}{d}\left[t\frac{e^{-j\omega_n t}}{-j\omega_n}\right]_{-d}^{0} - \frac{A}{d}\int_{-d}^{0}\frac{e^{-j\omega_n t}}{-j\omega_n}dt$$

$$c_{n2} = \frac{A}{d}\left[0 + d\frac{e^{j\omega_n d}}{-j\omega_n}\right] - \frac{A}{d(-j\omega_n)}\frac{\left[e^{-j\omega_n t}\right]_{-d}^{0}}{-j\omega_n}$$

$$c_{n2} = \frac{-A}{j\omega_n}e^{j\omega_n d} + \frac{A}{d\omega_n^2}\left(e^{-j\omega_n 0} - e^{j\omega_n d}\right)$$

$$c_{n2} = \frac{-A}{j\omega_n}e^{j\omega_n d} + \frac{A}{d\omega_n^2}\left(1 - e^{j\omega_n d}\right)$$

Para la última de las integrales tenemos

$$c_{n3} = -\frac{A}{d}\int_0^d t e^{-j\omega_n t}dt$$

Esa integral tampoco es inmediata de resolver. Abordémosla por partes, haciendo los mismos cambios de variables que en el caso anterior

$$u = t \quad \Rightarrow \quad du = dt$$

$$dv = e^{-j\omega_n t}dt \quad \Rightarrow \quad v = \frac{e^{-j\omega_n t}}{-j\omega_n}$$

Recordando que en la integración por partes

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

podemos sustituir

$$c_{n3} = -\frac{A}{d}\left[t\frac{e^{-j\omega_n t}}{-j\omega_n}\right]_0^d + \frac{A}{d}\int_0^d \frac{e^{-j\omega_n t}}{-j\omega_n}dt$$

$$c_{n3} = -\frac{A}{d}\left[d\frac{e^{-j\omega_n d}}{-j\omega_n} - 0\right] + \frac{A}{d(-j\omega_n)}\frac{\left[e^{-j\omega_n t}\right]_0^d}{-j\omega_n}$$

$$c_{n3} = \frac{A}{j\omega_n}e^{-j\omega_n d} - \frac{A}{d\omega_n^2}\left(e^{-j\omega_n d} - e^{j\omega_n 0}\right)$$

$$c_{n3} = \frac{A}{j\omega_n}e^{-j\omega_n d} - \frac{A}{d\omega_n^2}\left(e^{-j\omega_n d} - 1\right)$$

Con estos tres resultados estamos ya en condiciones de reanudar el cálculo de los coeficientes c_n del desarrollo en serie de Fourier. En efecto,

$$c_n = c_{n1} + c_{n2} + c_{n3}$$

$$c_n = \frac{A}{j\omega_n}\left(e^{j\omega_n d} - e^{-j\omega_n d}\right) + \frac{-A}{j\omega_n}e^{j\omega_n d} + \frac{A}{d\omega_n^2}\left(1 - e^{j\omega_n d}\right) + \frac{A}{j\omega_n}e^{-j\omega_n d} - \frac{A}{d\omega_n^2}\left(e^{-j\omega_n d} - 1\right)$$

$$c_n = e^{j\omega_n d}\left(\frac{A}{j\omega_n} - \frac{A}{j\omega_n} - \frac{A}{d\omega_n^2}\right) + e^{-j\omega_n d}\left(-\frac{A}{j\omega_n} + \frac{A}{j\omega_n} - \frac{A}{d\omega_n^2}\right) + \left(\frac{A}{d\omega_n^2} + \frac{A}{d\omega_n^2}\right)$$

$$c_n = e^{j\omega_n d}\left(\frac{-A}{d\omega_n^2}\right) + e^{-j\omega_n d}\left(\frac{-A}{d\omega_n^2}\right) + \frac{2A}{d\omega_n^2}$$

$$c_n = \frac{A}{d\omega_n^2}\left(2 - e^{j\omega_n d} - e^{-j\omega_n d}\right) = \frac{2A}{d\omega_n^2}\left[1 - \frac{\left(e^{j\omega_n d} + e^{-j\omega_n d}\right)}{2}\right] = \frac{2A}{d\omega_n^2}\left[1 - \cos(\omega_n d)\right]$$

Recordando la expresión del coseno del ángulo doble tenemos

$$\cos(2x) = \cos^2 x - sen^2 x = \left(1 - sen^2 x\right) - sen^2 x = 1 - 2sen^2 x$$

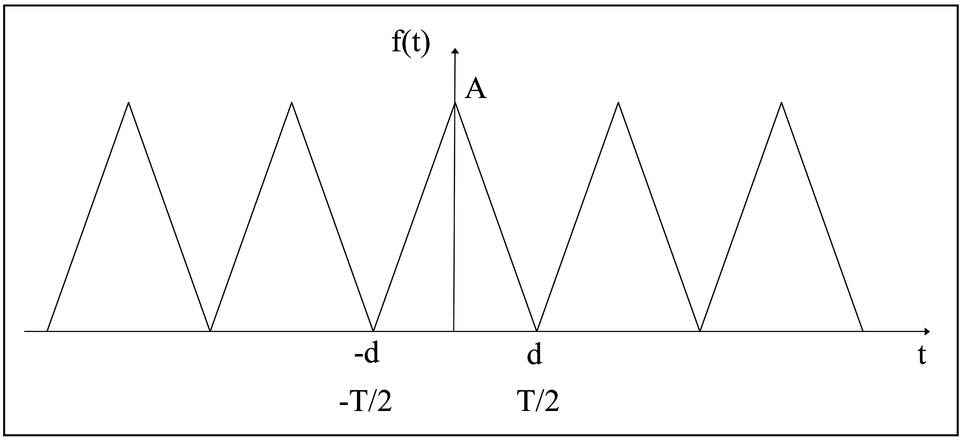
$$c_n = \frac{2A}{d\omega_n^2}\left[1 - \left\{1 - 2sen^2\left(\frac{\omega_n d}{2}\right)\right\}\right] = \frac{2A}{d\omega_n^2}2sen^2\left(\frac{\omega_n d}{2}\right) = \frac{4A}{d\omega_n^2}sen^2\left(\frac{\omega_n d}{2}\right)$$

$$c_n = \frac{4A}{d\omega_n^2}sen^2\left(\frac{\omega_n d}{2}\right)\frac{\left(\frac{\omega_n d}{2}\right)^2}{\left(\frac{\omega_n d}{2}\right)^2} = \frac{4A}{d\omega_n^2}Sa^2\left(\frac{\omega_n d}{2}\right)\frac{\omega_n^2 d^2}{4}$$

$$c_n = Ad\,Sa^2\left(\frac{\omega_n d}{2}\right)$$

Apartado b)

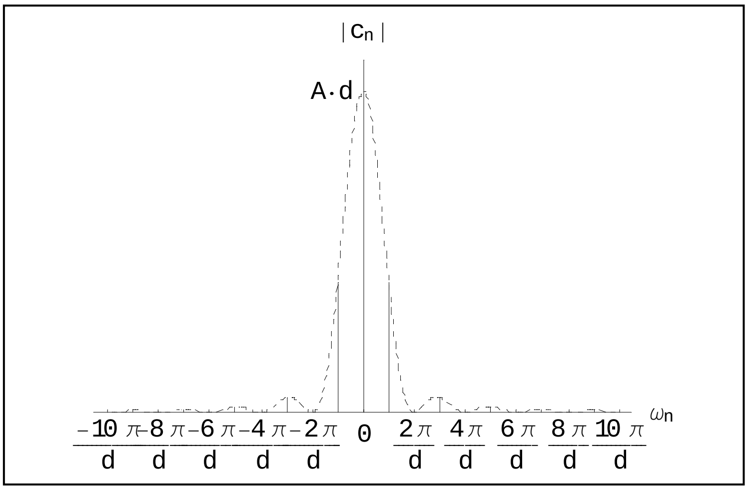
Para el caso de que *T=2d*, o lo que es lo mismo *d=T/2*, la onda toma la forma de la figura



En ese caso

$$c_n = Ad\,Sa^2\left(\frac{\omega_n d}{2}\right) = A\frac{T}{2}\,Sa^2\left(\frac{\omega_n \frac{T}{2}}{2}\right) = \frac{AT}{2}\,Sa^2\left(\frac{\frac{2\pi n}{T}\,\frac{T}{2}}{2}\right)$$

$$c_n = \frac{AT}{2}\,Sa^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$



Para calcular los armónicos recordaremos que la función se desarrolla como

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

es decir, que cada armónico vale

$$M_n = \frac{|c_n|}{T} + \frac{|c_{-n}|}{T}$$

$$M_n = \frac{\left|\frac{AT}{2}\ Sa^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right|}{T} + \frac{\left|\frac{AT}{2}\ Sa^2\left(-n\frac{\pi}{2}\right)\right|}{T} = \left|\frac{A}{2}\ Sa^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\frac{A}{2}\ Sa^2\left(-n\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

Como la función *Sample* es simétrica

$$M_n = \left|\frac{A}{2}\ Sa^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\frac{A}{2}\ Sa^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|2\frac{A}{2}\ Sa^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

$$M_n = \left|ASa^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

Por otro lado la componente de continua vale

$$M_0 = \frac{|c_0|}{T}$$

$$M_0 = \frac{\left|\frac{AT}{2}\ Sa^2\left(0\frac{\pi}{2}\right)\right|}{T} = \frac{A}{2}\cdot 1$$

$$M_0 = \frac{A}{2}$$

Para A=1 podemos escribir la siguiente tabla de valores

n	**M**
0	0.500
1	0.041
2	0.000
3	0.045
4	0.000
5	0.016
6	0.000
7	0.008
8	0.000
9	0.005
10	0.000