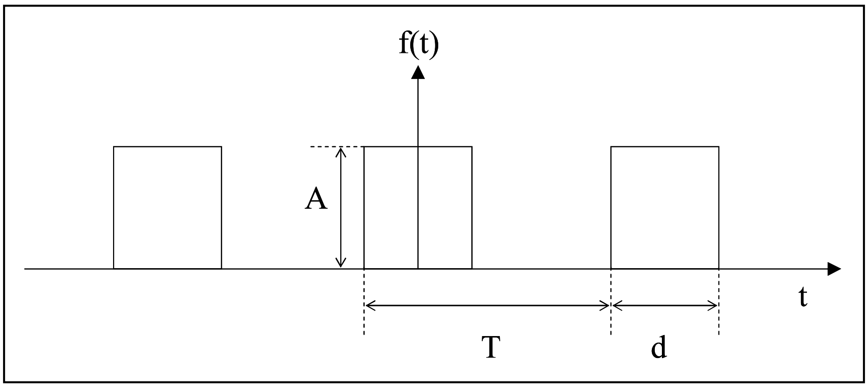
Problema PTC0004-06

Obtener los armónicos de un tren de pulsos de 1 voltio de amplitud y 1 Khz. de frecuencia para

a) Un duty cycle del 25%
b) Un duty cycle del 75%
c) Comparar y justificar los resultados anteriores

Solución PTC0004-06

La señal puede representarse genéricamente de la siguiente forma



Al ser *f(t)* una función periódica, admite un desarrollo en serie de Fourier de acuerdo con la expresión

$$f(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{j\omega_n t}$$

en la que los coeficientes se calculan de acuerdo con:

$$c_n=\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-j\omega_n t}dt$$

En nuestro caso tenemos

$$c_n=\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-j\omega_n t}dt=\int_{-d/2}^{d/2}Ae^{-j\omega_n t}dt$$

$$c_n=\frac{-A}{j\omega_n}\left[e^{-j\omega_n t}\right]_{-d/2}^{d/2}=\frac{-A}{j\omega_n}\left[e^{-j\omega_n\frac{d}{2}}-e^{j\omega_n\frac{d}{2}}\right]$$

$$c_n=\frac{A}{j\omega_n}\left[e^{j\omega_n\frac{d}{2}}-e^{-j\omega_n\frac{d}{2}}\right]\frac{2j}{2j}=\frac{A}{j\omega_n}2jsen\left(\omega_n\frac{d}{2}\right)$$

$$c_n=\frac{2A}{\omega_n}sen\left(\omega_n\frac{d}{2}\right)\frac{\omega_n d/2}{\omega_n d/2}$$

$$c_n=AdSa\left(\omega_n\frac{d}{2}\right)$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes, tenemos que el desarrollo en serie de Fourier queda

$$f(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} AdSa\left(\omega_n\frac{d}{2}\right)e^{j\omega_n t}$$

Para calcular los armónicos recordaremos que la función se desarrolla como

$$f(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

es decir, que cada armónico vale

$$M_n=\frac{|c_n|}{T}+\frac{|c_{-n}|}{T}$$

Sustituyendo tenemos

$$M_n=\frac{\left|AdSa\left(\omega_n\frac{d}{2}\right)\right|}{T}+\frac{\left|AdSa\left(\omega_{-n}\frac{d}{2}\right)\right|}{T}=\frac{\left|AdSa\left(\omega_n\frac{d}{2}\right)\right|}{T}+\frac{\left|AdSa\left(-\omega_n\frac{d}{2}\right)\right|}{T}$$

Como la función *Sample* es simétrica

$$M_n=\frac{\left|AdSa\left(\omega_n\frac{d}{2}\right)\right|}{T}+\frac{\left|AdSa\left(\omega_n\frac{d}{2}\right)\right|}{T}=\frac{\left|2AdSa\left(\omega_n\frac{d}{2}\right)\right|}{T}=\frac{\left|2AdSa\left(\frac{2\pi n}{T}\frac{d}{2}\right)\right|}{T}$$

$$M_n=\left|2A\frac{d}{T}Sa\left(n\pi\frac{d}{T}\right)\right|$$

Por otro lado la componente de continua vale

$$M_0=\frac{|c_0|}{T}$$

$$M_0=\frac{\left|AdSa\left(\omega_n\frac{d}{2}\right)\right|}{T}=\frac{\left|AdSa\left(0\frac{d}{2}\right)\right|}{T}$$

$$M_0=\frac{|Ad|}{T}$$

Apartado a)

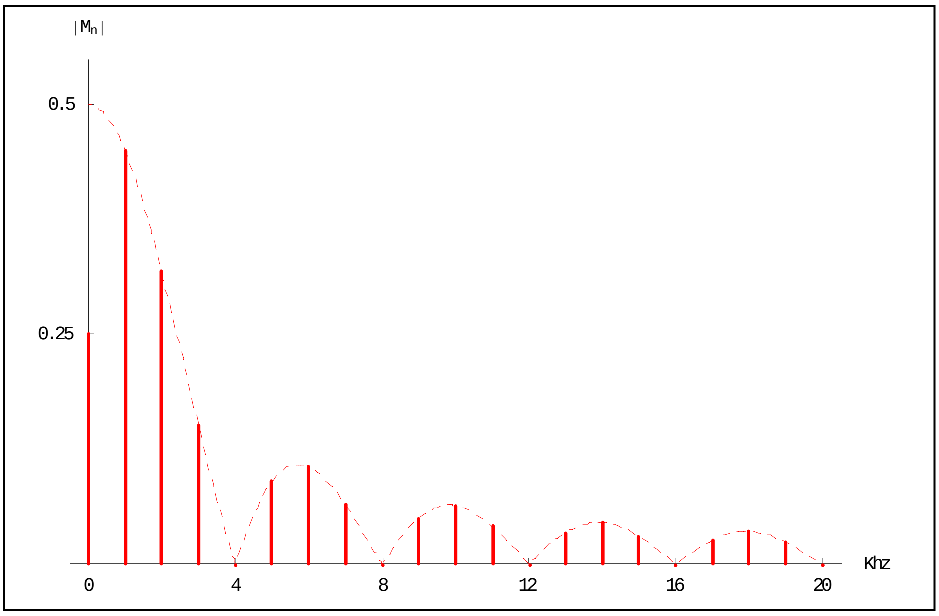
Para el caso de que el duty cycle sea del 25% tenemos que *d=T/4* por lo que

$$M_n=\left|2A\frac{1}{T}\frac{T}{4}Sa\left(n\pi\frac{1}{T}\frac{T}{4}\right)\right|=\left|\frac{A}{2}Sa\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

y

$$M_0=\left|A\frac{1}{T}\frac{T}{4}\right|=\frac{A}{4}$$

Para el caso de *A=1*, los armónicos pueden representarse gráficamente mediante el siguiente espectro



Apartado b)

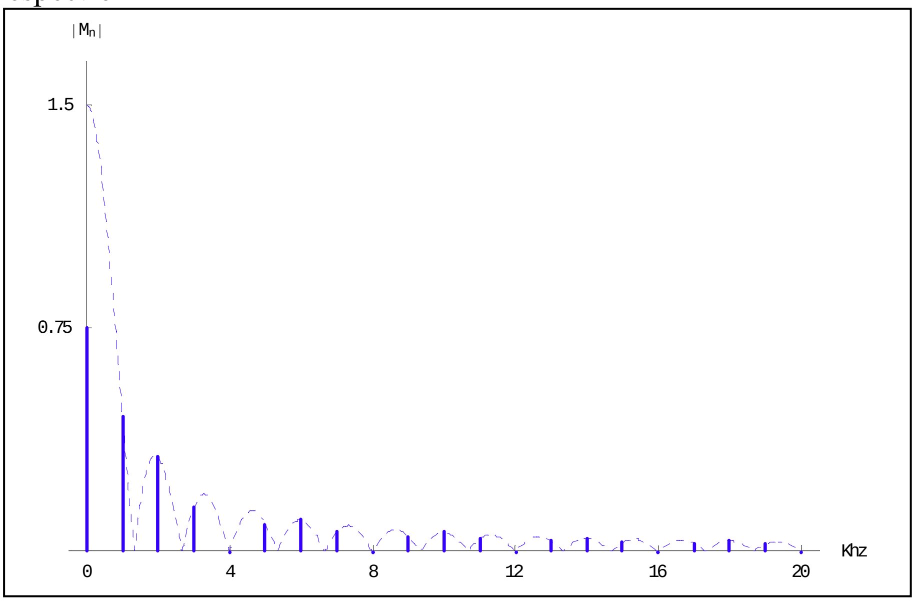
Para el caso de que el duty cycle sea del 75% tenemos que *d=3T/4* por lo que

$$M_n = \left| 2A\frac{1}{T}\frac{3T}{4} Sa\left(n\pi \frac{1}{T}\frac{3T}{4} \right) \right| = \left| \frac{3A}{2} Sa\left(n\frac{3\pi}{4} \right) \right|$$

y

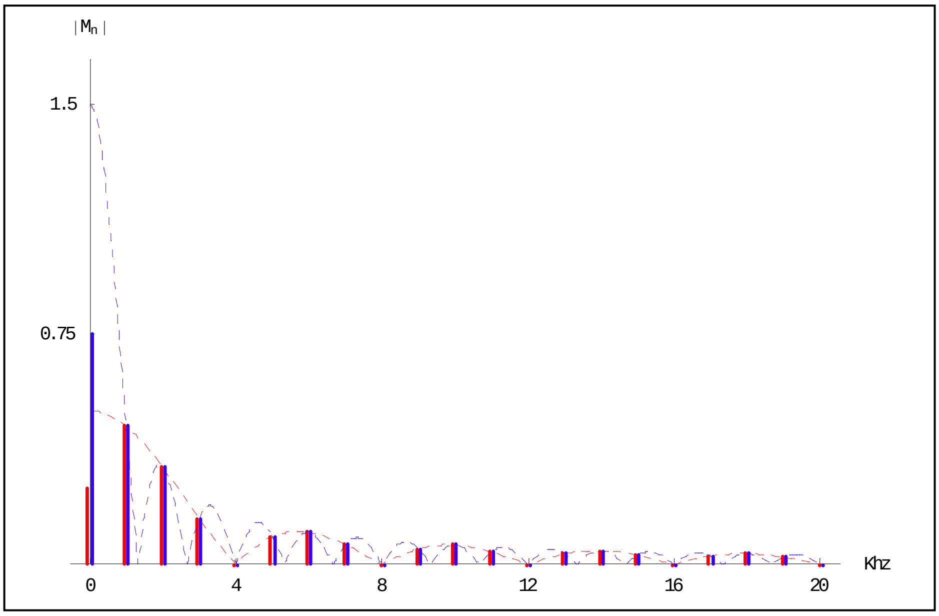
$$M_0 = \left| A\frac{1}{T}\frac{3T}{4} \right| = \frac{3A}{4}$$

Para el caso de *A=1*, los armónicos pueden representarse gráficamente mediante el siguiente espectro



Apartado c)

Si comparamos los resultados obtenidos en los dos casos anteriores tenemos

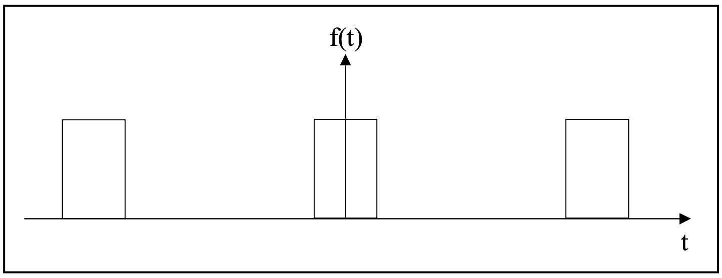


Si elaboramos una tabla con los valores de los armónicos para ambos casos tenemos

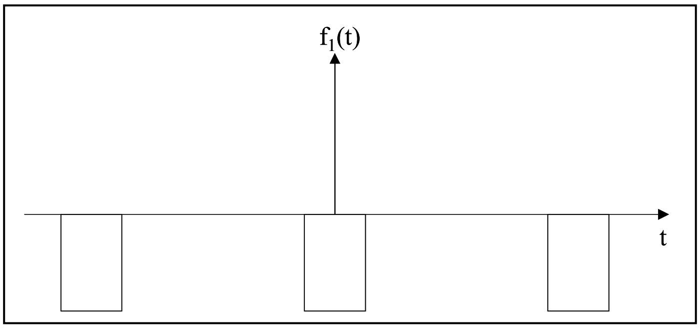
n	M	
	d=1/4 (25%)	**d=3/4 (75%)**
0	0.250	0.750
1	0.450	0.450
2	0.318	0.318
3	0.150	0.150
4	0.000	0.000
5	0.090	0.090
6	0.106	0.106
7	0.064	0.064
8	0.000	0.000
9	0.050	0.050
10	0.063	0.063

Tanto gráfica como tubularmente podemos comprobar que los armónicos en ambos casos son iguales, excepto para el de orden cero (nivel de continua).

En efecto, sea $f(t)$ un tren de pulsos con duty cycle del 25%

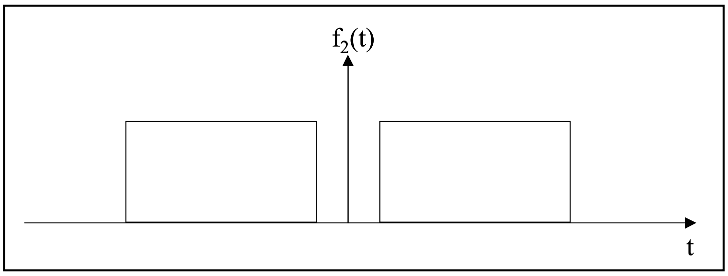


Sea $f_1(t)=-f(t)$



Y, por último, añadamos una componente de continua a la función anterior

$$f_2(t) = A + f_1(t) = A - f(t)$$



Como podemos comprobar la función resultante *$f_2(t)$* es un tren de pulsos con duty cycle del 75 % y se ha obtenido de otro tren de pulsos con duty cycle del 25% cambiándole de signo y con un diferente nivel de continua. Es lógico, por tanto, que tengan los mismos armónicos excepto el nivel de continua.