Problema PTC0004-07

Se dispone de un osciloscopio digital con capacidad de análisis espectral de señales mediante FFT. El valor de cada una de las componentes espectrales se presenta en dBV RMS (sobre 1 voltio RMS: Root Mean Square). Calcular los valores teóricos que deberían observarse en el osciloscopio cuando se realiza el análisis espectral de una señal sinusoidal de 1V de amplitud y 1Khz de frecuencia. Repetir el cálculo para:

1) Amplitudes de 2V y 5V.
2) Frecuencias de 0.5Khz y 2Khz.
3) Nivel de continua (offset) de -2V, -1V, +1V y +2V.

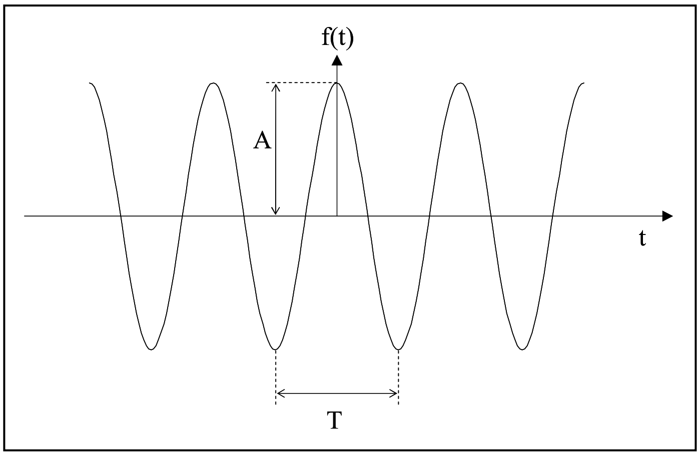
Solución PTC0004-07

Sabemos que la señal puede representarse genéricamente mediante una función periódica *f(t)*, que admite un desarrollo en serie de Fourier de acuerdo con la expresión

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

en la que los coeficientes se calculan de acuerdo con:

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_n t} dt$$



En el caso de una señal sinusoidal tenemos que

$$f(t) = A\cos(\omega_f t)$$

por lo que

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_n t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} A\cos(\omega_f t) e^{-j\omega_n t} dt$$

Recordando que

$$\cos(\omega_f t) = \frac{e^{j\omega_f t} + e^{-j\omega_f t}}{2}$$

tenemos

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} A \frac{e^{j\omega_f t} + e^{-j\omega_f t}}{2} e^{-j\omega_n t} dt = \frac{A}{2}\int_{-T/2}^{T/2} e^{j(\omega_f - \omega_n)t} dt + \frac{A}{2}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j(\omega_f + \omega_n)t} dt$$

Integrando

$$c_n = \frac{A}{2j(\omega_f - \omega_n)}\left[e^{j(\omega_f-\omega_n)t}\right]_{-T/2}^{T/2} - \frac{A}{2j(\omega_f + \omega_n)}\left[e^{-j(\omega_f+\omega_n)t}\right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$c_n = \frac{A\left(e^{j(\omega_f-\omega_n)\frac{T}{2}} - e^{-j(\omega_f-\omega_n)\frac{T}{2}}\right)}{2j(\omega_f - \omega_n)} - \frac{A\left(e^{-j(\omega_f+\omega_n)\frac{T}{2}} - e^{j(\omega_f+\omega_n)\frac{T}{2}}\right)}{2j(\omega_f + \omega_n)}$$

$$c_n = \frac{A\left(e^{j(\omega_f-\omega_n)\frac{T}{2}} - e^{-j(\omega_f-\omega_n)\frac{T}{2}}\right)}{2j(\omega_f - \omega_n)} + \frac{A\left(e^{j(\omega_f+\omega_n)\frac{T}{2}} - e^{-j(\omega_f+\omega_n)\frac{T}{2}}\right)}{2j(\omega_f + \omega_n)}$$

Recordando que

$$senx = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

podemos escribir

$$c_n = \frac{A}{(\omega_f - \omega_n)} sen\left[(\omega_f - \omega_n)\frac{T}{2}\right] + \frac{A}{(\omega_f + \omega_n)} sen\left[(\omega_f + \omega_n)\frac{T}{2}\right]$$

Multiplicando y dividiendo cada término por *T/2*

$$c_n = A\frac{T}{2}\frac{sen\left[(\omega_f - \omega_n)\frac{T}{2}\right]}{(\omega_f - \omega_n)\frac{T}{2}} + A\frac{T}{2}\frac{sen\left[(\omega_f + \omega_n)\frac{T}{2}\right]}{(\omega_f + \omega_n)\frac{T}{2}}$$

$$c_n = \frac{AT}{2} Sa\left[(\omega_f - \omega_n)\frac{T}{2}\right] + \frac{AT}{2} Sa\left[(\omega_f + \omega_n)\frac{T}{2}\right]$$

$$c_n = \frac{AT}{2} Sa\left[\left(\frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi n}{T}\right)\frac{T}{2}\right] + \frac{AT}{2} Sa\left[\left(\frac{2\pi}{T} + \frac{2\pi n}{T}\right)\frac{T}{2}\right]$$

$$c_n = \frac{AT}{2} Sa[(1-n)\pi] + \frac{AT}{2} Sa[(1+n)\pi]$$

Considerando que la función *Sample* es simétrica, *Sa(x)= Sa(-x)*

$$c_n = \frac{AT}{2} Sa[(n-1)\pi] + \frac{AT}{2} Sa[(n+1)\pi]$$

Como sabemos, la función *Sample* se anula para todos los múltiplos de π, excepto para el múltiple de orden cero, en el que vale 1. Por tanto sólo existirán términos no nulos de los coeficientes de Fourier para *n-1=0* y para *n+1=0*, es decir, para *n=1* y *n =-1*.

$$c_1 = \frac{AT}{2} Sa[(1-1)\pi] + \frac{AT}{2} Sa[(1+1)\pi] = \frac{AT}{2} Sa(0) + \frac{AT}{2} Sa(2\pi) = \frac{AT}{2} + 0 = \frac{AT}{2} + 0$$

Análogamente

$$c_{-1} = \frac{AT}{2} Sa[(-1-1)\pi] + \frac{AT}{2} Sa[(-1+1)\pi] = \frac{AT}{2} Sa(-2\pi) + \frac{AT}{2} Sa(0) = 0 + \frac{AT}{2} = \frac{AT}{2}$$

Para calcular los armónicos recordaremos que la función se desarrolla como

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

es decir, que cada armónico vale

$$M_n = \frac{|c_n|}{T} + \frac{|c_{-n}|}{T} \quad \forall n > 0$$

En este caso sólo existe el armónico de orden 1, que vale

$$M_1 = \frac{|c_1|}{T} + \frac{|c_{-1}|}{T} = \frac{1}{T}\frac{AT}{2} + \frac{1}{T}\frac{AT}{2} = A$$

Para la componente de continua tenemos que

$$M_0 = \frac{|c_0|}{T} = \frac{1}{T}\frac{AT}{2}|Sa[(0-1)\pi]| + \frac{1}{T}\frac{AT}{2}|Sa[(0+1)\pi]| = \frac{A}{2}|Sa(-\pi)| + \frac{A}{2}|Sa(\pi)| = 0 + 0 = 0$$

Los valores de los armónicos en RMS se calculan como el valor eficaz de los mismos. La tensión eficaz de una señal se define como el valor de la tensión de continua que disipa la misma potencia media que la señal. Para una tensión senoidal la potencia media disipada sobre una resistencia unidad es

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T [A\cos(\omega t)]^2 dt = \frac{A^2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)dt$$

Recordando que

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

tenemos

$$\overline{P} = \frac{A^2}{2T}\int_0^T dt + \frac{A^2}{2T}\int_0^T \cos(2\omega t)dt = \frac{A^2}{2T}[t]_0^T + \frac{A^2}{2T}\frac{1}{2\omega}[sen(2\omega t)]_0^T$$

$$\overline{P} = \frac{A^2}{2T}[T-0] + \frac{A^2}{4\omega T}[sen(2\omega T) - sen(0)] = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{4\omega T}sen(2\frac{2\pi}{T}T)$$

$$\overline{P} = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{4\omega T}sen(4\pi) = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{4\omega T}0$$

$$\overline{P} = \frac{A^2}{2}$$

Por otra parte, por la definición de la tensión eficaz, la potencia media disipada por una tensión continua sobre una resistencia unidad es

$$\overline{P} = V_e^2$$

por lo que igualando ambos términos tenemos

$$\overline{P} = V_e^2 = \frac{A^2}{2}$$

$$V_{RMS} = V_e = \sqrt{\frac{A^2}{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Esta expresión de la tensión eficaz o tensión RMS es válida para cualquier armónico excepto para el de orden cero, ya que al tratarse de una tensión de continua, por la propia definición de tensión eficaz,

$$V_{RMS} = V_e = A$$

Teniendo esto en cuenta, el valor RMS de los armónicos será

$$\begin{cases} M_{nRMS} = \dfrac{M_n}{\sqrt{2}} & \forall n > 0 \\ M_{nRMS} = M_n & \forall n = 0 \end{cases}$$

Si el osciloscopio representa el valor de los armónicos en dB sobre voltios RMS los valores esperados serán

$$M_{ndBV_{RMS}} = 20\log\frac{M_{nRMS}}{1}$$

$$\begin{cases} M_{ndBV_{RMS}} = 20\log\dfrac{M_n}{\sqrt{2}} & \forall n > 0 \\ M_{ndBV_{RMS}} = 20\log M_n & \forall n = 0 \end{cases}$$

Por último, debemos señalar que si a la señal se le suma una componente de continua (offset), el único armónico que resulta alterado es el de orden cero, al que hay que sumarle la tensión de offset.

Con estos resultados estamos en condiciones de obtener los valores teóricos de cada uno de los apartados

Apartado 1)

Armónicos	**Amplitud=1**	**Amplitud=2**	**Amplitud=5**
0 Khz.	-∞	-∞	-∞
1 Khz.	-3.01 dBV	3.01 dBV	10.97 dBV

Apartado 2)

Frecuencia= 0.5 Khz.		**Frecuencia= 1 Khz.**		**Frecuencia= 2 Khz.**	
0 Khz.	-∞	0 Khz.	-∞	0 Khz.	-∞
0.5 Khz.	-3.01 dBV	1 Khz.	-3.01 dBV	2 Khz.	-3.01 dBV

Apartado 3)

Armónicos	**Offset=-2**	**Offset=-1**	**Offset=0**	**Offset=1**	**Offset=2**
0 Khz.	6.02 dBV	0 dBV	-∞	0 dBV	6.02 dBV
1 Khz.	-3.01 dBV	-3.01 dBV	-3.01 dBV	-3.01 dBV	-3.01 dBV