Problema PTC0004-08

Se dispone de un osciloscopio digital con capacidad de análisis espectral de señales mediante FFT. El valor de cada una de las componentes espectrales se presenta en dBV RMS (sobre 1 voltio RMS: Root Mean Square). Calcular los valores teóricos que deberían observarse en el osciloscopio cuando se realiza el análisis espectral de una señal cuadrada de 1V de amplitud y 1Khz. Repetir el cálculo para:

1) Amplitudes de 2V y 5V.
2) Frecuencias de 0.5Khz y 2Khz.
3) Nivel de continua (offset) de -2V, -1V, +1V y +2V.
4) Duty Cycle de 1%, 12,5%, 25% y 75%.

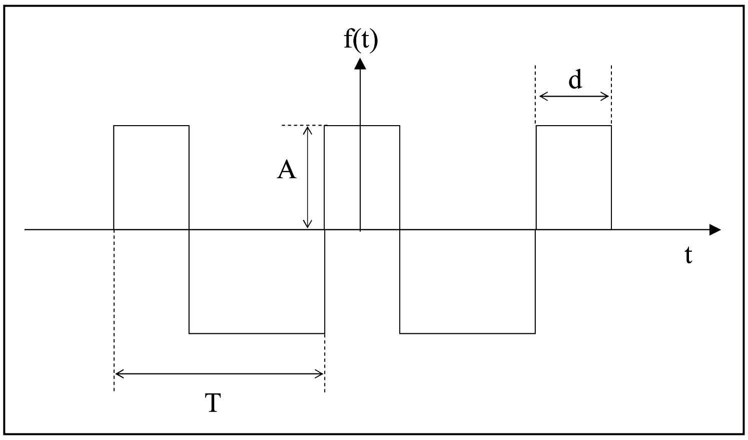
Solución PTC0004-08

Sabemos que la señal puede representarse genéricamente mediante una función periódica *f(t)*, que admite un desarrollo en serie de Fourier de acuerdo con la expresión

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

en la que los coeficientes se calculan de acuerdo con:

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_n t} dt$$



En el caso de una onda cuadrada con duty-cycle tenemos que

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\omega_n t}dt = \int_{-T/2}^{-d/2} -Ae^{-j\omega_n t}dt + \int_{-d/2}^{d/2} Ae^{-j\omega_n t}dt + \int_{d/2}^{T/2} -Ae^{-j\omega_n t}dt$$

$$c_n = \frac{A}{j\omega_n}\left[e^{-j\omega_n t}\right]_{-T/2}^{-d/2} + \frac{-A}{j\omega_n}\left[e^{-j\omega_n t}\right]_{-d/2}^{d/2} + \frac{A}{j\omega_n}\left[e^{-j\omega_n t}\right]_{d/2}^{T/2}$$

$$c_n = \frac{A}{j\omega_n}\left[e^{j\omega_n \frac{d}{2}} - e^{j\omega_n \frac{T}{2}}\right] + \frac{-A}{j\omega_n}\left[e^{-j\omega_n \frac{d}{2}} - e^{j\omega_n \frac{d}{2}}\right] + \frac{A}{j\omega_n}\left[e^{-j\omega_n \frac{T}{2}} - e^{-j\omega_n \frac{d}{2}}\right]$$

$$c_n = \frac{A}{j\omega_n}e^{j\omega_n \frac{d}{2}} - \frac{A}{j\omega_n}e^{j\omega_n \frac{T}{2}} - \frac{A}{j\omega_n}e^{-j\omega_n \frac{d}{2}} + \frac{A}{j\omega_n}e^{j\omega_n \frac{d}{2}} + \frac{A}{j\omega_n}e^{-j\omega_n \frac{T}{2}} - \frac{A}{j\omega_n}e^{-j\omega_n \frac{d}{2}}$$

$$c_n = \frac{2A}{j\omega_n} e^{j\omega_n \frac{d}{2}} - \frac{2A}{j\omega_n} e^{-j\omega_n \frac{d}{2}} - \frac{A}{j\omega_n} e^{j\omega_n \frac{T}{2}} + \frac{A}{j\omega_n} e^{-j\omega_n \frac{T}{2}}$$

$$c_n = \frac{2A}{j\omega_n}\left[e^{j\omega_n \frac{d}{2}} - e^{-j\omega_n \frac{d}{2}} \right] - \frac{A}{j\omega_n}\left[e^{j\omega_n \frac{T}{2}} - e^{-j\omega_n \frac{T}{2}} \right]$$

$$c_n = \frac{2A}{j\omega_n} \frac{\left[e^{j\omega_n \frac{d}{2}} - e^{-j\omega_n \frac{d}{2}} \right]}{2j} 2j - \frac{A}{j\omega_n} \frac{\left[e^{j\omega_n \frac{T}{2}} - e^{-j\omega_n \frac{T}{2}} \right]}{2j} 2j$$

$$c_n = \frac{4A}{\omega_n} sen\left(\omega_n \frac{d}{2} \right) - \frac{2A}{\omega_n} sen\left(\omega_n \frac{T}{2} \right)$$

$$c_n = \frac{4A}{\omega_n} \frac{sen\left(\omega_n \frac{d}{2} \right)}{\omega_n \frac{d}{2}} \omega_n \frac{d}{2} - \frac{2A}{\omega_n} \frac{sen\left(\omega_n \frac{T}{2} \right)}{\omega_n \frac{T}{2}} \omega_n \frac{T}{2}$$

$$c_n = 2AdSa\left(\omega_n \frac{d}{2} \right) - ATSa\left(\omega_n \frac{T}{2} \right)$$

Para calcular los armónicos recordaremos que la función se desarrolla como

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

es decir, que cada armónico vale

$$M_n = \frac{|c_n|}{T} + \frac{|c_{-n}|}{T} \quad \forall n > 0$$

Sustituyendo tenemos

$$M_n = \frac{\left| 2AdSa\left(\omega_n \frac{d}{2} \right) - ATSa\left(\omega_n \frac{T}{2} \right) \right|}{T} + \frac{\left| 2AdSa\left(\omega_{-n} \frac{d}{2} \right) - ATSa\left(\omega_{-n} \frac{T}{2} \right) \right|}{T} \quad \forall n > 0$$

$$M_n = \frac{\left| 2AdSa\left(\omega_n \frac{d}{2} \right) - ATSa\left(\omega_n \frac{T}{2} \right) \right|}{T} + \frac{\left| 2AdSa\left(-\omega_n \frac{d}{2} \right) - ATSa\left(-\omega_n \frac{T}{2} \right) \right|}{T} \quad \forall n > 0$$

Como la función *Sample* es simétrica

$$M_n = \frac{\left| 2AdSa\left(\omega_n \frac{d}{2} \right) - ATSa\left(\omega_n \frac{T}{2} \right) \right|}{T} + \frac{\left| 2AdSa\left(\omega_n \frac{d}{2} \right) - ATSa\left(\omega_n \frac{T}{2} \right) \right|}{T} \quad \forall n > 0$$

$$M_n = \frac{2}{T}\left|2AdSa\left(\omega_n \frac{d}{2}\right) - ATSa\left(\omega_n \frac{T}{2}\right)\right| \quad \forall n > 0$$

$$M_n = \left|\frac{4Ad}{T}Sa\left(\frac{2\pi n}{T}\frac{d}{2}\right) - 2ASa\left(\frac{2\pi n}{T}\frac{T}{2}\right)\right| \quad \forall n > 0$$

$$M_n = \left|\frac{4Ad}{T}Sa\left(n\pi \frac{d}{T}\right) - 2ASa(n\pi)\right| \quad \forall n > 0$$

El segundo término es siempre cero para *n>0* por lo que

$$M_n = \left|\frac{4Ad}{T}Sa\left(n\pi \frac{d}{T}\right)\right| \quad \forall n > 0$$

Si llamamos d_c al duty-cyle tenemos

$$d_c = \frac{d}{T}$$

sustituyendo

$$M_n = \left|4Ad_c Sa(n\pi d_c)\right| \quad \forall n > 0$$

Los valores de los armónicos en RMS se calculan como el valor eficaz de los mismos. La tensión eficaz de una señal se define como el valor de la tensión de continua que disipa la misma potencia media que la señal. En definitiva para un armónico de amplitud A tenemos

$$V_{RMS} = V_e = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Esta expresión de la tensión eficaz o tensión RMS es válida para cualquier armónico excepto para el de orden cero, ya que al tratarse de una tensión de continua, por la propia definición de tensión eficaz,

$$V_{RMS} = V_e = A$$

Teniendo esto en cuenta, el valor RMS de los armónicos será

$$M_{ndBV_{RMS}} = 20\log\frac{M_{nRMS}}{1} = 20\log\frac{M_n}{\sqrt{2}} = 20\log\frac{\left|4Ad_c Sa(n\pi d_c)\right|}{\sqrt{2}} \quad \forall n > 0$$

Para la componente de continua tenemos

$$M_0 = \frac{|c_0|}{T}$$

$$M_0 = \frac{\left|2AdSa\left(\omega_n \frac{d}{2}\right) - ATSa\left(\omega_n \frac{T}{2}\right)\right|}{T} = \frac{\left|2AdSa\left(0\frac{d}{2}\right) - ATSa\left(0\frac{T}{2}\right)\right|}{T}$$

$$M_0 = \frac{|2Ad - AT|}{T} = |2Ad_c - A|$$

$$M_{0dBV_{RMS}} = 20\log\frac{M_{0RMS}}{1} = 20\log M_0 = 20\log|2Ad_c - A|$$

Por último, debemos señalar que si a la señal se le suma una componente de continua (offset), el único armónico que resulta alterado es el de orden cero, al que hay que sumarle la tensión de offset.

Con estos resultados estamos en condiciones de obtener los valores teóricos de cada uno de los subapartados.

Apartado 1)

Armónicos	**Amplitud=1**	**Amplitud=2**	**Amplitud=5**
0 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
1 Khz.	-0.91 dBV	5.11 dBV	13.07 dBV
2 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
3 Khz.	-10.45 dBV	-4.33 dBV	3.52 dBV
4 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
5 Khz.	-14.89 dBV	-8.87 dBV	-0.91 dBV
6 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
7 Khz.	-17.81 dBV	-11.79 dBV	-3.83 dBV
8 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
9 Khz.	-20.00 dBV	-13.98 dBV	-6.02 dBV
10 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV

Apartado 2)

Frecuencia= 0.5 Khz.		**Frecuencia= 1 Khz.**		**Frecuencia= 2 Khz.**	
0 Khz.	-∞ dBV	0 Khz.	-∞ dBV	0 Khz.	-∞ dBV
0.5 Khz.	-0.91 dBV	1 Khz.	-0.91 dBV	2 Khz.	-0.91 dBV
1 Khz.	-∞ dBV	2 Khz.	-∞ dBV	4 Khz.	-∞ dBV
1.5 Khz.	-10.45 dBV	3 Khz.	-10.45 dBV	6 Khz.	-10.45 dBV
2 Khz.	-∞ dBV	4 Khz.	-∞ dBV	8 Khz.	-∞ dBV
2.5 Khz.	-14.89 dBV	5 Khz.	-14.89 dBV	10 Khz.	-14.89 dBV
3 Khz.	-∞ dBV	6 Khz.	-∞ dBV	12 Khz.	-∞ dBV
3.5 Khz.	-17.81 dBV	7 Khz.	-17.81 dBV	14 Khz.	-17.81 dBV
4 Khz.	-∞ dBV	8 Khz.	-∞ dBV	16 Khz.	-∞ dBV
4.5 Khz.	-20.00 dBV	9 Khz.	-20.00 dBV	18 Khz.	-20.00 dBV
5 Khz.	-∞ dBV	10 Khz.	-∞ dBV	20 Khz.	-∞ dBV

Apartado 3)

Armónicos	Offset=-2	Offset=-1	Offset=0	Offset=1	Offset=2
0 Khz.	6.02 dBV	0 dBV	-∞ dBV	0 dBV	6.02 dBV
1 Khz.	-0.91 dBV	-0.91 dBV	-0.91 dBV	-0.91 dBV	-0.91 dBV
2 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
3 Khz.	-10.45 dBV	-10.45 dBV	-10.45 dBV	-10.45 dBV	-10.45 dBV
4 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
5 Khz.	-14.89 dBV	-14.89 dBV	-14.89 dBV	-14.89 dBV	-14.89 dBV
6 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
7 Khz.	-17.81 dBV	-17.81 dBV	-17.81 dBV	-17.81 dBV	-17.81 dBV
8 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
9 Khz.	-20.00 dBV	-20.00 dBV	-20.00 dBV	-20.00 dBV	-20.00 dBV
10 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV

Apartado 4)

Armónicos	dc=1%	dc=12.5%	dc=25%	dc=50%	dc=75%
0 Khz.	-0.18 dBV	-2.50 dBV	-6.02 dBV	-∞ dBV	-6.02 dBV
1 Khz.	-30.97 dBV	-9.26 dBV	-3.92 dBV	-0.91 dBV	-3.92 dBV
2 Khz.	-30.97 dBV	-9.94 dBV	-6.93 dBV	-∞ dBV	-6.93 dBV
3 Khz.	-30.98 dBV	-11.14 dBV	-13.46 dBV	-10.45 dBV	-13.46 dBV
4 Khz.	-30.99 dBV	-12.95 dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
5 Khz.	-31.00 dBV	-15.58 dBV	-17.90 dBV	-14.89 dBV	-17.90 dBV
6 Khz.	-31.02 dBV	-19.49 dBV	-16.48 dBV	-∞ dBV	-16.48 dBV
7 Khz.	-31.04 dBV	-26.16 dBV	-20.82 dBV	-17.81 dBV	-20.82 dBV
8 Khz.	-31.06 dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
9 Khz.	-31.09 dBV	-28.34 dBV	-23.01 dBV	-20.00 dBV	-23.01 dBV
10 Khz.	-31.11 dBV	-23.92 dBV	-20.91 dBV	-∞ dBV	-20.91 dBV