Problema PTC0004-09

Se dispone de un osciloscopio digital con capacidad de análisis espectral de señales mediante FFT. El valor de cada una de las componentes espectrales se presenta en dBV RMS (sobre 1 voltio RMS: Root Mean Square). Calcular los valores teóricos que deberían observarse en el osciloscopio cuando se realiza el análisis espectral de una señal triangular de 1V de amplitud y 1Khz. Repetir el cálculo para:

1) Amplitudes de 2V y 5V.
2) Frecuencias de 0.5Khz y 2Khz.
3) Nivel de continua (offset) de -2V, -1V, +1V y +2V.

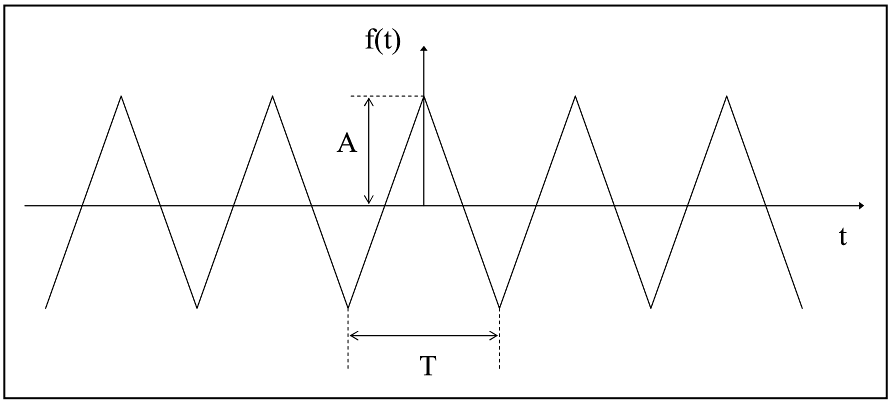
Solución PTC0004-09

Sabemos que la señal puede representarse genéricamente mediante una función periódica *f(t)*, que admite un desarrollo en serie de Fourier de acuerdo con la expresión

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

en la que los coeficientes se calculan de acuerdo con:

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_n t} dt$$



En el caso de la onda triangular la señal *f(t)* puede considerarse compuesta por dos rectas independientes que se corresponderían con las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$. Por lo tanto,

$$c_n = \int_{-T/2}^{0} f_1(t) e^{-j\omega_n t} dt + \int_{0}^{T/2} f_2(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

Las rectas $f_1(t)$ y $f_2(t)$ pueden calcularse fácilmente pues se conocen los puntos por los que pasan. Recordando que la ecuación de una recta que pasa por dos puntos es

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

o, lo que es lo mismo,

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Para la primera de las rectas, que pasa por los puntos *[-T/2,-A]* y *[0,A]*, tenemos

$$f_1(t) = -A + \frac{A-(-A)}{0-\left(-\frac{T}{2}\right)}\left(t+\frac{T}{2}\right) = -A + \frac{4A}{T}\left(t+\frac{T}{2}\right) = -A + \frac{4A}{T}t + \frac{4A}{T}\frac{T}{2} = -A + \frac{4A}{T}t + 2A$$

$$f_1(t) = A + \frac{4A}{T}t$$

Para la segunda recta, que pasa por los puntos *[0,A]* y *[T/2,-A]*, podemos escribir

$$f_2(t) = A + \frac{(-A)-A}{\frac{T}{2}-0}(t-0) = A - \frac{4A}{T}t$$

Con estos resultados podemos escribir de nuevo el coeficiente como

$$c_n = \int_{-T/2}^{0}\left(A + \frac{4A}{T}t\right)e^{-j\omega_n t}dt + \int_{0}^{T/2}\left(A - \frac{4A}{T}t\right)e^{-j\omega_n t}dt$$

$$c_n = \int_{-T/2}^{0} Ae^{-j\omega_n t}dt + \int_{-T/2}^{0}\frac{4A}{T}te^{-j\omega_n t}dt + \int_{0}^{T/2} Ae^{-j\omega_n t}dt - \int_{0}^{T/2}\frac{4A}{T}te^{-j\omega_n t}dt$$

Agrupando términos

$$c_n = A\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega_n t}dt + \frac{4A}{T}\int_{-T/2}^{0} te^{-j\omega_n t}dt - \frac{4A}{T}\int_{0}^{T/2} te^{-j\omega_n t}dt$$

Para simplicidad de la resolución denominemos c_{n1}, c_{n2} y c_{n3} respectivamente a cada una de las integrales anteriores. De esta forma

$$c_n = c_{n1} + c_{n2} + c_{n3}$$

Resolvamos ahora cada una de ellas. Para la primera tenemos

$$c_{n1} = A\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega_n t}dt = \frac{A}{-j\omega_n}\left[e^{-j\omega_n t}\right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{A}{-j\omega_n}\left(e^{-j\omega_n T/2} - e^{+j\omega_n T/2}\right)$$

$$c_{n1} = \frac{A}{j\omega_n}\left(e^{j\omega_n T/2} - e^{-j\omega_n T/2}\right)$$

En el caso de la segunda integral podemos escribir

$$c_{n2} = \frac{4A}{T}\int_{-T/2}^{0} te^{-j\omega_n t}dt$$

Esa integral no es inmediata de resolver. Abordémosla por partes, haciendo los siguientes cambios de variables

$$u = t \quad \Rightarrow \quad du = dt$$

$$dv = e^{-j\omega_n t}dt \quad \Rightarrow \quad v = \frac{e^{-j\omega_n t}}{-j\omega_n}$$

Recordando que en la integración por partes

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

podemos sustituir

$$c_{n2} = \frac{4A}{T}\left[t\frac{e^{-j\omega_n t}}{-j\omega_n}\right]_{-T/2}^{0} - \frac{4A}{T}\int_{-T/2}^{0}\frac{e^{-j\omega_n t}}{-j\omega_n}dt$$

$$c_{n2} = \frac{4A}{T}\left[0 + \frac{T}{2}\frac{e^{j\omega_n T/2}}{-j\omega_n}\right] - \frac{4A}{T(-j\omega_n)}\frac{\left[e^{-j\omega_n t}\right]_{-T/2}^{0}}{-j\omega_n}$$

$$c_{n2} = \frac{-2A}{j\omega_n}e^{j\omega_n T/2} + \frac{4A}{T\omega_n^2}\left(e^{-j\omega_n 0} - e^{j\omega_n T/2}\right)$$

$$c_{n2} = \frac{-2A}{j\omega_n}e^{j\omega_n T/2} + \frac{4A}{T\omega_n^2}\left(1 - e^{j\omega_n T/2}\right)$$

Para la última de las integrales tenemos

$$c_{n3} = -\frac{4A}{T}\int_0^{T/2} t e^{-j\omega_n t}\,dt$$

Esa integral tampoco es inmediata de resolver. Abordémosla por partes, haciendo los mismos cambios de variables que en el caso anterior

$$u = t \quad \Rightarrow \quad du = dt$$

$$dv = e^{-j\omega_n t}dt \quad \Rightarrow \quad v = \frac{e^{-j\omega_n t}}{-j\omega_n}$$

Recordando que en la integración por partes

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

podemos sustituir

$$c_{n3} = -\frac{4A}{T}\left[t\frac{e^{-j\omega_n t}}{-j\omega_n}\right]_0^{T/2} + \frac{4A}{T}\int_0^{T/2}\frac{e^{-j\omega_n t}}{-j\omega_n}dt$$

$$c_{n3} = -\frac{4A}{T}\left[\frac{T}{2}\frac{e^{-j\omega_n T/2}}{-j\omega_n} - 0\right] + \frac{4A}{T(-j\omega_n)}\frac{\left[e^{-j\omega_n t}\right]_0^{T/2}}{-j\omega_n}$$

$$c_{n3} = \frac{2A}{j\omega_n}e^{-j\omega_n T/2} - \frac{4A}{T\omega_n^2}\left(e^{-j\omega_n T/2} - e^{j\omega_n 0}\right)$$

$$c_{n3} = \frac{2A}{j\omega_n}e^{-j\omega_n T/2} - \frac{4A}{T\omega_n^2}\left(e^{-j\omega_n T/2} - 1\right)$$

Con estos tres resultados estamos ya en condiciones de reanudar el cálculo de los coeficientes c_n del desarrollo en serie de Fourier. En efecto,

$$c_n = c_{n1} + c_{n2} + c_{n3}$$

$$c_n = \frac{A}{j\omega_n}\left(e^{j\omega_n T/2} - e^{-j\omega_n T/2}\right) + \frac{-2A}{j\omega_n}e^{j\omega_n T/2} + \frac{4A}{T\omega_n^2}\left(1 - e^{j\omega_n T/2}\right) + \frac{2A}{j\omega_n}e^{-j\omega_n T/2} - \frac{4A}{T\omega_n^2}\left(e^{-j\omega_n T/2} - 1\right)$$

$$c_n = e^{j\omega_n T/2}\left(\frac{A}{j\omega_n} - \frac{2A}{j\omega_n} - \frac{4A}{T\omega_n^2}\right) + e^{-j\omega_n T/2}\left(-\frac{A}{j\omega_n} + \frac{2A}{j\omega_n} - \frac{4A}{T\omega_n^2}\right) + \left(\frac{4A}{T\omega_n^2} + \frac{4A}{T\omega_n^2}\right)$$

$$c_n = e^{j\omega_n T/2}\left(\frac{-A}{j\omega_n} - \frac{4A}{T\omega_n^2}\right) + e^{-j\omega_n T/2}\left(\frac{A}{j\omega_n} - \frac{4A}{T\omega_n^2}\right) + \frac{8A}{T\omega_n^2}$$

$$c_n = \frac{-A}{j\omega_n}\left(e^{j\omega_n T/2} - e^{-j\omega_n T/2}\right) - \frac{4A}{T\omega_n^2}\left(e^{j\omega_n T/2} + e^{-j\omega_n T/2}\right) + \frac{8A}{T\omega_n^2}$$

$$c_n = \frac{-2A}{\omega_n} sen\left(\omega_n \frac{T}{2}\right) - \frac{8A}{T\omega_n^2}\cos\left(\omega_n \frac{T}{2}\right) + \frac{8A}{T\omega_n^2}$$

Recordando la expresión del coseno del ángulo doble tenemos

$$\cos(2x) = \cos^2 x - sen^2 x = \left(1 - sen^2 x\right) - sen^2 x = 1 - 2sen^2 x$$

$$c_n = \frac{-2A}{\omega_n} sen\left(\omega_n \frac{T}{2}\right) - \frac{8A}{T\omega_n^2}\left[1 - 2sen^2\left(\omega_n \frac{T}{4}\right)\right] + \frac{8A}{T\omega_n^2}$$

$$c_n = \frac{-2A}{\omega_n} sen\left(\omega_n \frac{T}{2}\right) - \frac{8A}{T\omega_n^2} + \frac{16A}{T\omega_n^2} sen^2\left(\omega_n \frac{T}{4}\right) + \frac{8A}{T\omega_n^2}$$

$$c_n = \frac{-2A}{\omega_n} sen\left(\omega_n \frac{T}{2}\right) + \frac{16A}{T\omega_n^2} sen^2\left(\omega_n \frac{T}{4}\right)$$

$$c_n = \frac{-2A}{\omega_n} sen\left(\omega_n \frac{T}{2}\right) + \frac{16A}{T\omega_n^2} sen^2\left(\omega_n \frac{T}{4}\right)$$

$$c_n = \frac{-2A}{\omega_n} sen\left(\omega_n \frac{T}{2}\right)\frac{\omega_n \frac{T}{2}}{\omega_n \frac{T}{2}} + \frac{16A}{T\omega_n^2} sen^2\left(\omega_n \frac{T}{4}\right)\frac{\left(\omega_n \frac{T}{4}\right)^2}{\left(\omega_n \frac{T}{4}\right)^2}$$

$$c_n = -ATSa\left(\omega_n \frac{T}{2}\right) + AT\,Sa^2\left(\omega_n \frac{T}{4}\right)$$

$$c_n = -ATSa\left(\frac{2\pi n}{T}\frac{T}{2}\right) + AT\,Sa^2\left(\frac{2\pi n}{T}\frac{T}{4}\right)$$

$$c_n = AT\,Sa^2\left(n\frac{\pi}{2}\right) - ATSa(n\pi)$$

Para calcular los armónicos recordaremos que la función se desarrolla como

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

es decir, que cada armónico vale

$$M_n = \frac{|c_n|}{T} + \frac{|c_{-n}|}{T} \quad \forall n > 0$$

$$M_n = \frac{\left| ATSa^2\left(n\frac{\pi}{2}\right) - ATSa(n\pi)\right|}{T} + \frac{\left| ATSa^2\left(-n\frac{\pi}{2}\right) - ATSa(-n\pi)\right|}{T} \quad \forall n > 0$$

$$M_n = \left| ASa^2\left(n\frac{\pi}{2}\right) - ASa(n\pi)\right| + \left| ASa^2\left(-n\frac{\pi}{2}\right) - ASa(-n\pi)\right| \quad \forall n > 0$$

Como la función *Sample* es simétrica

$$M_n = \left| ASa^2\left(n\frac{\pi}{2}\right) - ASa(n\pi)\right| + \left| ASa^2\left(n\frac{\pi}{2}\right) - ASa(n\pi)\right| \quad \forall n > 0$$

$$M_n = 2\left| ASa^2\left(n\frac{\pi}{2}\right) - ASa(n\pi)\right| \quad \forall n > 0$$

Pero el segundo término es siempre cero para n>0, por lo que

$$M_n = \left| 2ASa^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right| \quad \forall n > 0$$

Por otro lado la componente de continua vale

$$M_0 = \frac{|c_0|}{T}$$

$$M_0 = \frac{\left| ATSa^2\left(0\frac{\pi}{2}\right) - ATSa(0\pi)\right|}{T} = \frac{|AT - AT|}{T}$$

$$M_0 = 0$$

Si el osciloscopio representa el valor de los armónicos en dB sobre voltios RMS los valores esperados serán

$$M_{ndBV_{RMS}} = 20\log\frac{M_{nRMS}}{1} = 20\log\frac{M_n}{\sqrt{2}} = 20\log\frac{\left| 2ASa^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right|}{\sqrt{2}} \quad \forall n > 0$$

Para la componente de continua tenemos

$$M_{0dBV_{RMS}} = 20\log\frac{M_{0RMS}}{1} = 20\log 0 = -\infty dBV_{RMS}$$

Por último, debemos señalar que si a la señal se le suma una componente de continua (offset), el único armónico que resulta alterado es el de orden cero, al que hay que sumarle la tensión de offset.

Con estos resultados estamos en condiciones de obtener los valores teóricos de cada uno de los subapartados.

Apartado 1)

Armónicos	**Amplitud=1**	**Amplitud=2**	**Amplitud=5**
0 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
1 Khz.	-4.83 dBV	1.19 dBV	9.14 dBV
2 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
3 Khz.	-23.92 dBV	-17.90 dBV	-9.94 dBV
4 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
5 Khz.	-32.79 dBV	-26.77 dBV	-18.81 dBV
6 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
7 Khz.	-38.64 dBV	-32.62 dBV	-24.66 dBV
8 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
9 Khz.	-43.00 dBV	-36.98 dBV	-29.02 dBV
10 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV

Apartado 2)

Frecuencia= 0.5 Khz.		**Frecuencia= 1 Khz.**		**Frecuencia= 2 Khz.**	
0 Khz.	-∞ dBV	0 Khz.	-∞ dBV	0 Khz.	-∞ dBV
0.5 Khz.	-4.83 dBV	1 Khz.	-4.83 dBV	2 Khz.	-4.83 dBV
1 Khz.	-∞ dBV	2 Khz.	-∞ dBV	4 Khz.	-∞ dBV
1.5 Khz.	-23.92 dBV	3 Khz.	-23.92 dBV	6 Khz.	-23.92 dBV
2 Khz.	-∞ dBV	4 Khz.	-∞ dBV	8 Khz.	-∞ dBV
2.5 Khz.	-32.79 dBV	5 Khz.	-32.79 dBV	10 Khz.	-32.79 dBV
3 Khz.	-∞ dBV	6 Khz.	-∞ dBV	12 Khz.	-∞ dBV
3.5 Khz.	-38.64 dBV	7 Khz.	-38.64 dBV	14 Khz.	-38.64 dBV
4 Khz.	-∞ dBV	8 Khz.	-∞ dBV	16 Khz.	-∞ dBV
4.5 Khz.	-43.00 dBV	9 Khz.	-43.00 dBV	18 Khz.	-43.00 dBV
5 Khz.	-∞ dBV	10 Khz.	-∞ dBV	20 Khz.	-∞ dBV

Apartado 3)

Armónicos	**Offset=-2**	**Offset=-1**	**Offset=0**	**Offset=1**	**Offset=2**
0 Khz.	6.02 dBV	0 dBV	-∞ dBV	0 dBV	6.02 dBV
1 Khz.	-4.83 dBV	-4.83 dBV	-4.83 dBV	-4.83 dBV	-4.83 dBV
2 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
3 Khz.	-23.92 dBV	-23.92 dBV	-23.92 dBV	-23.92 dBV	-23.92 dBV
4 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
5 Khz.	-32.79 dBV	-32.79 dBV	-32.79 dBV	-32.79 dBV	-32.79 dBV
6 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
7 Khz.	-38.64 dBV	-38.64 dBV	-38.64 dBV	-38.64 dBV	-38.64 dBV
8 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
9 Khz.	-43.00 dBV	-43.00 dBV	-43.00 dBV	-43.00 dBV	-43.00 dBV
10 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV