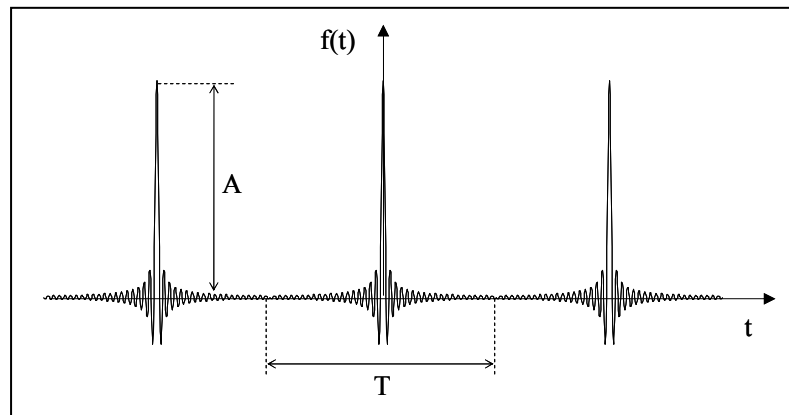


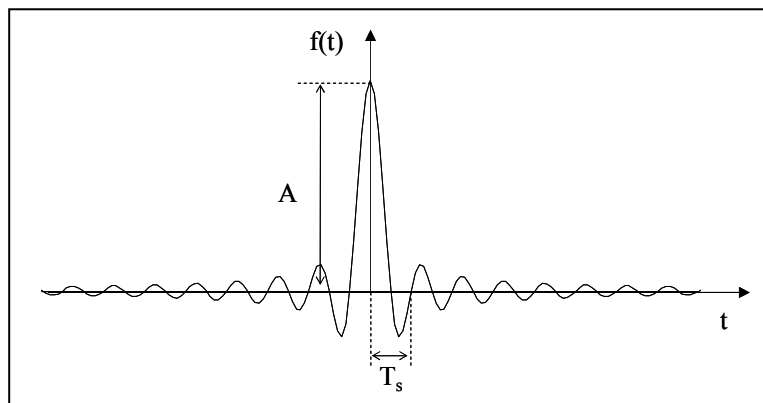
Problema PTC0004-10

Se dispone de un osciloscopio digital con capacidad de análisis espectral de señales mediante FFT. El valor de cada una de las componentes espectrales se presenta en dBV RMS (sobre 1 voltio RMS: Root Mean Square). Calcular los valores teóricos que deberían observarse en el osciloscopio cuando se realiza el análisis espectral de una señal periódica de 1Khz, constituida en cada período por una función Sample de 10V de amplitud y 40Khz de frecuencia.

Solución PTC0004-10



La figura representa el tren de pulsos del enunciado. Cada uno de los ciclos puede verse en detalle en la figura siguiente



Sabemos que la señal puede representarse genéricamente mediante una función periódica $f(t)$, que admite un desarrollo en serie de Fourier de acuerdo con la expresión

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$$

en la que los coeficientes se calculan de acuerdo con:

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

En el caso que nos ocupa tenemos que

$$f(t) = A Sa(\omega_s t) = A Sa\left(\frac{2\pi}{T_s} t\right) \quad \forall t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$$

por lo que

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} A Sa(\omega_s t) e^{-j\omega_n t} dt = A \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\text{sen}(\omega_s t)}{\omega_s t} e^{-j\omega_n t} dt$$

Desafortunadamente la expresión anterior no puede resolverse analíticamente. Caben dos soluciones: a) una integración numérica con el cálculo de cada uno de los valores necesarios; o b) una solución analítica aproximada. Intentemos primero este segundo camino.

Consideremos para ello una señal Sample igual a la anterior, pero que no se repite periódicamente, es decir, un único pulso de tipo Sample. Para este caso,

$$g(t) = A Sa(\omega_s t)$$

y, al no ser periódica, su representación espectral se consigue mediante la transformada de Fourier que vale

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} A Sa(\omega_s t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[A Sa(\omega_s t)]$$

Esta integral tampoco puede resolverse directamente, pero sí podemos acudir a las propiedades de la transformada de Fourier para resolverla. Recordamos que si una función $m(t)$ se transforma en

$$M(\omega) = \mathcal{F}[m(t)]$$

entonces la función

$$n(t) = M(t)$$

se transforma en

$$N(\omega) = \mathcal{F}[n(t)] = \mathcal{F}[M(t)] = 2\pi m(-\omega)$$

Apliquemos esta propiedad a una función pulso de amplitud B y ancho d

$$\begin{cases} m(t) = B & \forall t \in \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right] \\ m(t) = 0 & \forall t \notin \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right] \end{cases}$$

Sabemos, y es fácil demostrar, que su transformada vale

$$M(\omega) = \mathcal{F}[m(t)] = Bd Sa\left(\omega \frac{d}{2}\right)$$

Tengamos ahora otra función constituida por un pulso tipo Sample

$$n(t) = M(t) = Bd Sa\left(t \frac{d}{2}\right)$$

La transformada de esta función, aplicando la propiedad anteriormente enunciada será

$$N(\omega) = \mathcal{F}[n(t)] = \mathcal{F}[M(t)] = 2\pi m(-\omega)$$

lo que dada la simetría de la función Sample nos lleva a

$$N(\omega) = 2\pi m(\omega)$$

$$\begin{cases} N(\omega) = 2\pi B & \forall \omega \in \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right] \\ N(\omega) = 0 & \forall \omega \notin \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right] \end{cases}$$

Comparando $n(t)$ con $g(t)$ tenemos

$$\begin{cases} g(t) = A \text{Sa}(\omega_s t) \\ n(t) = Bd \text{Sa}\left(t \frac{d}{2}\right) \end{cases}$$

y, por lo tanto, ambas funciones son iguales si

$$\omega_s = \frac{d}{2}; \quad A = Bd$$

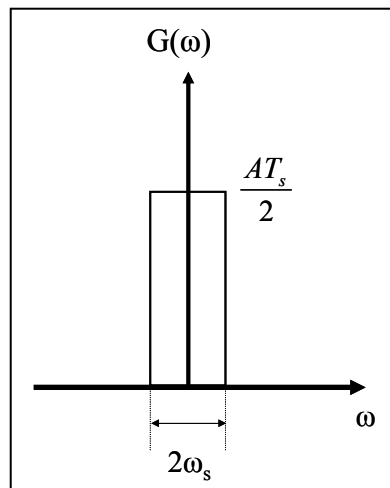
o lo que es lo mismo

$$d = 2\omega_s; \quad B = \frac{A}{d} = \frac{A}{2\omega_s}$$

por lo que la transformada es

$$\begin{cases} G(\omega) = 2\pi \frac{A}{2\omega_s} = 2\pi \frac{AT_s}{2 \cdot 2\pi} = \frac{AT_s}{2} & \forall \omega \in [-\omega_s, \omega_s] \\ G(\omega) = 0 & \forall \omega \notin [-\omega_s, \omega_s] \end{cases}$$

es decir, un pulso cuadrado en el plano de la frecuencia, tal como puede observarse en la gráfica



Con esos resultados, y volviendo a la señal original, podemos escribir

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} A \text{Sa}(\omega_s t) e^{-j\omega_n t} dt - \int_{-\infty}^{-T/2} A \text{Sa}(\omega_s t) e^{-j\omega_n t} dt - \int_{T/2}^{\infty} A \text{Sa}(\omega_s t) e^{-j\omega_n t} dt$$

Comparando con las expresiones anteriores vemos que

$$c_n = G(\omega) - \int_{-\infty}^{-T/2} A \text{Sa}(\omega_s t) e^{-j\omega_n t} dt - \int_{T/2}^{\infty} A \text{Sa}(\omega_s t) e^{-j\omega_n t} dt$$

Si $T \gg T_s$ la función Sample toma un valor muy pequeño, lo mismo que ocurre con las dos integrales de la expresión anterior. Por tanto, de una forma aproximada (ver Anexo), podemos escribir

$$c_n \approx G(\omega)$$

$$\begin{cases} c_n \approx \frac{AT_s}{2} & \forall \omega_n \in [-\omega_s, \omega_s] \\ c_n \approx 0 & \forall \omega_n \notin [-\omega_s, \omega_s] \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_n \approx \frac{AT_s}{2} & \forall \frac{2\pi m}{T} \in \left[-\frac{2\pi}{T_s}, \frac{2\pi}{T_s}\right] \\ c_n \approx 0 & \forall \frac{2\pi m}{T} \notin \left[-\frac{2\pi}{T_s}, \frac{2\pi}{T_s}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_n \approx \frac{AT_s}{2} & \forall n \in \left[-\frac{T}{T_s}, \frac{T}{T_s}\right] \\ c_n \approx 0 & \forall n \notin \left[-\frac{T}{T_s}, \frac{T}{T_s}\right] \end{cases}$$

El valor de $G(\omega)$ presenta una singularidad en $\omega = \omega_s$, cambiando bruscamente de valor. Esto hace que debamos estudiar especialmente el valor de c_n para $\omega_n = \omega_s$. En este caso tenemos

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} A Sa(\omega_s t) e^{-j\omega_n t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} A Sa(\omega_s t) e^{-j\omega_s t} dt$$

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} A Sa(\omega_s t) [\cos(\omega_s t) - j \text{sen}(\omega_s t)] dt$$

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} A Sa(\omega_s t) \cos(\omega_s t) dt - \int_{-T/2}^{T/2} A j Sa(\omega_s t) \text{sen}(\omega_s t) dt$$

La segunda integral, como la de cualquier función simétrica es cero. En efecto,

$$\int_{-T/2}^{T/2} A j Sa(\omega_s t) \text{sen}(\omega_s t) dt = \int_{-T/2}^0 A j Sa(\omega_s t) \text{sen}(\omega_s t) dt + \int_0^{T/2} A j Sa(\omega_s t) \text{sen}(\omega_s t) dt$$

Haciendo en la primera integral el cambio de variable

$$t = -x; \quad dt = -dx; \quad t = -T/2 \rightarrow x = T/2; \quad t = 0 \rightarrow x = 0$$

tenemos

$$\int_{-T/2}^{T/2} A j Sa(\omega_s t) \text{sen}(\omega_s t) dt = \int_{T/2}^0 A j Sa(-\omega_s x) \text{sen}(-\omega_s x) (-dx) + \int_0^{T/2} A j Sa(\omega_s t) \text{sen}(\omega_s t) dt$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} A j Sa(\omega_s t) \text{sen}(\omega_s t) dt = - \int_{T/2}^0 A j Sa(-\omega_s x) \text{sen}(-\omega_s x) (-dx) + \int_0^{T/2} A j Sa(\omega_s t) \text{sen}(\omega_s t) dt$$

Como la función Sample es simétrica y la función seno no lo es, podemos escribir

$$\int_{-T/2}^{T/2} A j Sa(\omega_s t) \text{sen}(\omega_s t) dt = - \int_{T/2}^0 A j Sa(\omega_s x) \text{sen}(\omega_s x) dx + \int_0^{T/2} A j Sa(\omega_s t) \text{sen}(\omega_s t) dt$$

de donde, como queríamos demostrar,

$$\int_{-T/2}^{T/2} A jSa(\omega_s t) sen(\omega_s t) dt = 0$$

Sustituyendo en el cálculo del valor de c_n tenemos

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} A Sa(\omega_s t) \cos(\omega_s t) dt - \int_{-T/2}^{T/2} A jSa(\omega_s t) sen(\omega_s t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} A Sa(\omega_s t) \cos(\omega_s t) dt$$

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} A \frac{sen(\omega_s t)}{\omega_s t} \cos(\omega_s t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{A}{\omega_s t} \frac{sen(2\omega_s t)}{2} dt = \int_{-T/2}^{T/2} A Sa(2\omega_s t) dt$$

$$c_n \approx \int_{-\infty}^{\infty} A Sa(2\omega_s t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} A Sa(2\omega_s t) e^{j0t} dt$$

Es decir el valor será aproximadamente igual al término de continua (para $\omega=0$) de la transformada de una función Sample de frecuencia doble a la original. Por tanto, para $\omega = \omega_s$, tenemos

$$c_n \approx \frac{A(T_s/2)}{2} = \frac{AT_s}{4}$$

Para calcular los armónicos recordaremos que cada armónico vale

$$M_n = \frac{|c_n|}{T} + \frac{|c_{-n}|}{T} \quad \forall n > 0$$

$$\begin{cases} M_n \approx \frac{AT_s}{2T} + \frac{AT_s}{2T} & \forall n \in \left[0, \frac{T}{T_s}\right] \\ M_n \approx 0 & \forall n \notin \left[0, \frac{T}{T_s}\right] \\ M_n \approx \frac{AT_s}{4T} + \frac{AT_s}{4T} & \forall n = \frac{T}{T_s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_n \approx \frac{AT_s}{T} & \forall n \in \left[0, \frac{T}{T_s}\right] \\ M_n \approx 0 & \forall n \notin \left[0, \frac{T}{T_s}\right] \\ M_n \approx \frac{AT_s}{2T} & \forall n = \frac{T}{T_s} \end{cases}$$

Por otro lado la componente de continua vale

$$M_0 = \frac{|c_0|}{T}$$

$$M_0 \approx \frac{AT_s}{2T}$$

Si el osciloscopio representa el valor de los armónicos en dB sobre voltios RMS los valores esperados serán

$$M_{ndBV_{RMS}} = 20 \log \frac{M_{nRMS}}{1} = 20 \log \frac{M_n}{\sqrt{2}}$$

Para la componente de continua tenemos

$$M_{0dBV_{RMS}} = 20 \log \frac{M_{0RMS}}{1} = 20 \log M_0$$

Con estos resultados estamos en condiciones de obtener los valores teóricos exactos (por cálculo numérico) y aproximados de cada armónico, expresados todos ellos en dBV RMS.

Khz	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Aprox.	-18.06	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05
Exacto	-18.11	-15.01	-15.10	-15.01	-15.10	-15.01	-15.10	-15.01	-15.10	-15.01

Khz	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Aprox.	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05
Exacto	-15.10	-15.00	-15.10	-15.00	-15.10	-15.00	-15.10	-15.00	-15.11	-15.00

Khz	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Aprox.	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05
Exacto	-15.11	-15.00	-15.11	-14.99	-15.12	-14.98	-15.12	-14.97	-15.14	-14.96

Khz	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
Aprox.	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05	-15.05
Exacto	-15.15	-14.94	-15.17	-14.92	-15.21	-14.87	-15.28	-14.76	-15.50	-14.30

Khz	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
Aprox.	-21.07	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Exacto	-21.09	-36.14	-41.54	-44.98	-47.51	-49.52	-51.18	-52.61	-53.86	-54.97

Anexo. Cálculo del error de aproximación

Hemos visto que

$$c_n = G(\omega) - \int_{-\infty}^{-T/2} ASa(\omega_s t) e^{-j\omega_n t} dt - \int_{T/2}^{\infty} ASa(\omega_s t) e^{-j\omega_n t} dt$$

lo que nos permite, si $T \gg T_s$, aproximarlos mediante

$$c_n \approx G(\omega)$$

El error cometido en esta aproximación es

$$\epsilon_n = \int_{-\infty}^{-T/2} ASa(\omega_s t) e^{-j\omega_n t} dt + \int_{T/2}^{\infty} ASa(\omega_s t) e^{-j\omega_n t} dt$$

Este error podemos reescribirlo haciendo, en la primera integral, el cambio de variable

$$t = -x; \quad dt = -dx; \quad t = -\infty \rightarrow x = \infty; \quad t = -T/2 \rightarrow x = T/2$$

por lo que tenemos

$$\epsilon_n = \int_{\infty}^{T/2} ASa(-\omega_s x) e^{j\omega_n x} (-dx) + \int_{T/2}^{\infty} ASa(\omega_s t) e^{-j\omega_n t} dt$$

Recordando que la función Sample es simétrica

$$\epsilon_n = \int_{T/2}^{\infty} ASa(\omega_s x) e^{j\omega_n x} dx + \int_{T/2}^{\infty} ASa(\omega_s t) e^{-j\omega_n t} dt$$

y cambiando de nuevo de variable $x=t$

$$\epsilon_n = \int_{T/2}^{\infty} ASa(\omega_s t) e^{j\omega_n t} dt + \int_{T/2}^{\infty} ASa(\omega_s t) e^{-j\omega_n t} dt$$

$$\epsilon_n = \int_{T/2}^{\infty} ASa(\omega_s t) (e^{j\omega_n t} + e^{-j\omega_n t}) dt = \int_{T/2}^{\infty} 2ASa(\omega_s t) \frac{(e^{j\omega_n t} + e^{-j\omega_n t})}{2} dt$$

$$\epsilon_n = \int_{T/2}^{\infty} 2ASa(\omega_s t) \cos(\omega_n t) dt = \int_{T/2}^{\infty} 2A \frac{\text{sen}(\omega_s t)}{\omega_s t} \cos(\omega_n t) dt$$

Recordando las expresiones trigonométricas de la suma y resta de ángulos tenemos

$$\begin{cases} \text{sen}(a+b) = \text{sen}a \cdot \text{cos}b + \text{cos}a \cdot \text{sen}b \\ \text{sen}(a-b) = \text{sen}a \cdot \text{cos}b - \text{cos}a \cdot \text{sen}b \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones

$$\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b) = 2\text{sen}a \cdot \text{cos}b$$

$$\text{sen}a \cdot \text{cos}b = \frac{\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)}{2}$$

Aplicando esta expresión a la integral tenemos

$$\epsilon_n = \int_{T/2}^{\infty} \frac{2A}{\omega_s t} \frac{\text{sen}(\omega_s t + \omega_n t) + \text{sen}(\omega_s t - \omega_n t)}{2} dt$$

$$\varepsilon_n = \int_{T/2}^{\infty} A \frac{\text{sen}[(\omega_s + \omega_n)t]}{\omega_s t} dt + \int_{T/2}^{\infty} A \frac{\text{sen}[(\omega_s - \omega_n)t]}{\omega_s t} dt$$

Distinguiremos tres casos.

a) El primero será el que ocurre cuando $\omega_n < \omega_s$. En este caso en la primera integral hacemos el cambio de variable

$$(\omega_s + \omega_n)t = x; \quad dt = \frac{dx}{\omega_s + \omega_n}; \quad t = \infty \rightarrow x = \infty; \quad t = T/2 \rightarrow x = \frac{T(\omega_s + \omega_n)}{2}$$

y en la segunda integral hacemos el cambio

$$(\omega_s - \omega_n)t = x; \quad dt = \frac{dx}{\omega_s - \omega_n}; \quad t = \infty \rightarrow x = \infty; \quad t = T/2 \rightarrow x = \frac{T(\omega_s - \omega_n)}{2}$$

por lo que el error resulta ser

$$\varepsilon_n = \int_{\frac{T(\omega_s + \omega_n)}{2}}^{\infty} A \frac{\text{sen}x}{\omega_s \left(\frac{x}{\omega_s + \omega_n} \right)} \frac{dx}{\omega_s + \omega_n} + \int_{\frac{T(\omega_s - \omega_n)}{2}}^{\infty} A \frac{\text{sen}x}{\omega_s \left(\frac{x}{\omega_s - \omega_n} \right)} \frac{dx}{\omega_s - \omega_n} \quad \forall \omega_n < \omega_s$$

$$\varepsilon_n = \frac{A}{\omega_s} \int_{\frac{T(\omega_s + \omega_n)}{2}}^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx + \frac{A}{\omega_s} \int_{\frac{T(\omega_s - \omega_n)}{2}}^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx \quad \forall \omega_n < \omega_s$$

b) El segundo caso será el que ocurre cuando $\omega_n > \omega_s$. En este caso en la primera integral hacemos el mismo cambio de variable y en la segunda integral hacemos el cambio

$$(\omega_n - \omega_s)t = x; \quad dt = \frac{dx}{\omega_n - \omega_s}; \quad t = \infty \rightarrow x = \infty; \quad t = T/2 \rightarrow x = \frac{T(\omega_n - \omega_s)}{2}$$

por lo que el error resulta ser

$$\varepsilon_n = \int_{\frac{T(\omega_n + \omega_s)}{2}}^{\infty} A \frac{\text{sen}x}{\omega_s \left(\frac{x}{\omega_s + \omega_n} \right)} \frac{dx}{\omega_s + \omega_n} + \int_{\frac{T(\omega_n - \omega_s)}{2}}^{\infty} A \frac{\text{sen}(-x)}{\omega_s \left(\frac{x}{\omega_n - \omega_s} \right)} \frac{dx}{\omega_n - \omega_s} \quad \forall \omega_n > \omega_s$$

$$\varepsilon_n = \frac{A}{\omega_s} \int_{\frac{T(\omega_n + \omega_s)}{2}}^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx - \frac{A}{\omega_s} \int_{\frac{T(\omega_n - \omega_s)}{2}}^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx \quad \forall \omega_n > \omega_s$$

c) El tercer y último caso será el que ocurre cuando $\omega_n = \omega_s$. En este caso sustituimos estos valores en ambas integrales teniendo

$$\varepsilon_n = \int_{T/2}^{\infty} A \frac{\text{sen}(2\omega_s t)}{\omega_s t} dt + \int_{T/2}^{\infty} A \frac{\text{sen}(0t)}{\omega_s t} dt \quad \forall \omega_n = \omega_s$$

$$\varepsilon_n = \int_{T/2}^{\infty} A \frac{\text{sen}(2\omega_s t)}{\omega_s t} dt \quad \forall \omega_n = \omega_s$$

Haciendo el cambio de variable

$$2\omega_s t = x; \quad dt = \frac{dx}{2\omega_s}; \quad t = \infty \rightarrow x = \infty; \quad t = T/2 \rightarrow x = T\omega_s$$

tenemos

$$\varepsilon_n = \int_{\omega_s}^{\infty} A \frac{\text{sen}x}{x} \frac{dx}{2\omega_s} \quad \forall \omega_n = \omega_s$$

$$\varepsilon_n = \frac{A}{\omega_s} \int_{\omega_s}^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx \quad \forall \omega_n = \omega_s$$

Resumiendo los tres casos, el error de aproximación resulta ser

$$\begin{cases} \varepsilon_n = \frac{A}{\omega_s} \int_{\frac{\omega_n+\omega_s}{2}}^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx + \frac{A}{\omega_s} \int_{\frac{\omega_s-\omega_n}{2}}^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx & \forall \omega_n < \omega_s \\ \varepsilon_n = \frac{A}{\omega_s} \int_{\frac{\omega_n+\omega_s}{2}}^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx - \frac{A}{\omega_s} \int_{\frac{\omega_n-\omega_s}{2}}^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx & \forall \omega_n > \omega_s \\ \varepsilon_n = \frac{A}{\omega_s} \int_{\omega_s}^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx & \forall \omega_n = \omega_s \end{cases}$$

y en términos absolutos

$$\begin{cases} |\varepsilon_n| \leq \left| \frac{A}{\omega_s} \int_{\frac{\omega_n+\omega_s}{2}}^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx \right| + \left| \frac{A}{\omega_s} \int_{\frac{\omega_s-\omega_n}{2}}^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx \right| & \forall \omega_n < \omega_s \\ |\varepsilon_n| \leq \left| \frac{A}{\omega_s} \int_{\frac{\omega_n+\omega_s}{2}}^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx \right| + \left| \frac{A}{\omega_s} \int_{\frac{\omega_n-\omega_s}{2}}^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx \right| & \forall \omega_n > \omega_s \\ |\varepsilon_n| \leq \left| \frac{A}{\omega_s} \int_{\omega_s}^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx \right| & \forall \omega_n = \omega_s \end{cases}$$

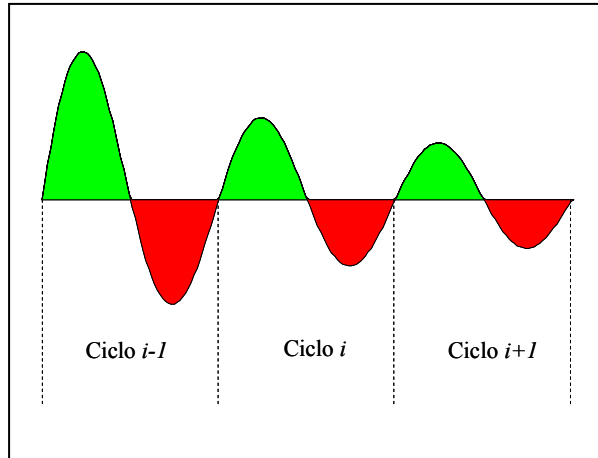
En definitiva, el error resulta ser dependiente de integrales del tipo

$$I(a) = \int_a^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx$$

en las que el límite inferior de la integral es un número positivo que crece, cuando T crece.

$$\begin{cases} |\varepsilon_n| \leq \left| \frac{A}{\omega_s} I\left(\frac{T(\omega_n + \omega_s)}{2}\right) \right| + \left| \frac{A}{\omega_s} I\left(\frac{T(\omega_s - \omega_n)}{2}\right) \right| & \forall \omega_n < \omega_s \\ |\varepsilon_n| \leq \left| \frac{A}{\omega_s} I\left(\frac{T(\omega_n + \omega_s)}{2}\right) \right| + \left| \frac{A}{\omega_s} I\left(\frac{T(\omega_n - \omega_s)}{2}\right) \right| & \forall \omega_n > \omega_s \\ |\varepsilon_n| \leq \left| \frac{A}{\omega_s} I(T\omega_s) \right| & \forall \omega_n = \omega_s \end{cases}$$

Mostraremos que las integrales $I(a)$ y, por tanto el error de aproximación, son muy pequeños cuando T es muy grande. Para ello veamos que el integrando está formado por dos funciones: una senoide de período 2π y una hipérbola. La integral es el área debajo de la curva formada por el integrando y el eje de abscisas, lo que podemos obtener también sumando las áreas de cada período o ciclo.



Numeramos los ciclos empezando por $i=0$ (de $x=0$ a $x=2\pi$), $i=1$ (de $x=2\pi$ a $x=4\pi$), $i=2$ (de $x=4\pi$ a $x=6\pi$), y así sucesivamente hasta $i=\infty$. Supondremos también que el límite inferior de la integral a está en el ciclo m -ésimo (por simplicidad y sin pérdida de generalidad supondremos que coincide con el inicio del ciclo). Es decir,

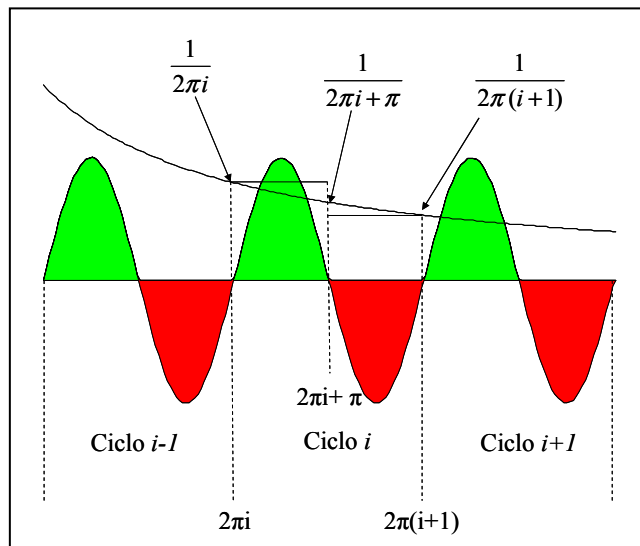
$$a = 2\pi m$$

Según esto, la integral vale

$$I(a) = \int_a^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx = \sum_{i=m}^{\infty} A_i$$

siendo A_i el área del ciclo i -ésimo. Este ciclo va desde $x=2\pi i$ a $x=2\pi(i+1)$ y está formado por dos semiciclos, uno positivo de área A_{ip} desde $x=2\pi i$ a $x=2\pi i+\pi$ y otro negativo de área A_{in} desde $x=2\pi i+\pi$ a $x=2\pi(i+1)$, siendo

$$A_i = A_{ip} + A_{in} = \int_{2\pi i}^{2\pi i+\pi} \frac{\text{sen}x}{x} dx + \int_{2\pi i+\pi}^{2\pi(i+1)} \frac{\text{sen}x}{x} dx$$



En el semiciclo positivo, la senoide está multiplicada por un valor variable $1/x$ comprendido en el intervalo

$$\frac{1}{2\pi i} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{2\pi i + \pi}$$

Si sustituimos ese factor variable por una constante igual al máximo valor del factor en el semiciclo obtendremos una cota superior del área del semiciclo. En efecto,

$$A_{ip} = \int_{2\pi i}^{2\pi i + \pi} \frac{\text{sen}x}{x} dx \leq \int_{2\pi i}^{2\pi i + \pi} \frac{\text{sen}x}{2\pi i} dx$$

Igualmente, en el semiciclo negativo la senoide está multiplicada por un valor variable $1/x$ comprendido en el intervalo

$$\frac{1}{2\pi i + \pi} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{2\pi(i+1)}$$

Si sustituimos ese factor variable por una constante igual al mínimo valor del factor en el semiciclo obtendremos una cota superior del área del semiciclo (recordemos que el área en este semiciclo es negativa). En efecto,

$$A_{in} = \int_{2\pi(i+1)}^{2\pi(i+1) + \pi} \frac{\text{sen}x}{x} dx \leq \int_{2\pi(i+1)}^{2\pi(i+1) + \pi} \frac{\text{sen}x}{2\pi(i+1)} dx$$

Sustituyendo las cotas superiores de las áreas de los semiciclos positivo y negativo obtenemos una cota superior del área total del ciclo

$$A_i = A_{ip} + A_{in} \leq \int_{2\pi i}^{2\pi i + \pi} \frac{\text{sen}x}{2\pi i} dx + \int_{2\pi(i+1)}^{2\pi(i+1) + \pi} \frac{\text{sen}x}{2\pi(i+1)} dx$$

Integrando tenemos

$$A_i \leq \frac{[-\cos x]_{2\pi i}^{2\pi i + \pi}}{2\pi i} + \frac{[-\cos x]_{2\pi(i+1)}^{2\pi(i+1) + \pi}}{2\pi(i+1)}$$

$$A_i \leq \frac{\cos[2\pi i] - \cos[2\pi i + \pi]}{2\pi i} + \frac{\cos[2\pi i + \pi] - \cos[2\pi(i+1)]}{2\pi(i+1)}$$

$$A_i \leq \frac{1 - (-1)}{2\pi i} + \frac{(-1) - 1}{2\pi(i+1)} = \frac{2}{2\pi i} - \frac{2}{2\pi(i+1)}$$

$$A_i \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right)$$

Sustituyendo este resultado en el cálculo de la integral de la función Sample tenemos

$$I(a) = \int_a^\infty \frac{\text{sen}x}{x} dx = \sum_{i=m}^{\infty} A_i \leq \frac{1}{\pi} \sum_{i=m}^{\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right)$$

$$I(a) \leq \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \right) + \left(\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3} \right) + \dots \right]$$

$$I(a) \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{m} \right) = \frac{1}{m\pi}$$

Recordando que

$$a = 2\pi m$$

y sustituyendo el valor de m en función de a tenemos

$$I(a) \leq \frac{1}{\pi} \frac{2\pi}{a} = \frac{2}{a}$$

Sustituyendo esta cota de la integral en la expresión del error de aproximación tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} |\varepsilon_n| \leq \left| \frac{A}{\omega_s} \frac{2}{T(\omega_n + \omega_s)} \right| + \left| \frac{A}{\omega_s} \frac{2}{T(\omega_s - \omega_n)} \right| \quad \forall \omega_n < \omega_s \\ |\varepsilon_n| \leq \left| \frac{A}{\omega_s} \frac{2}{T(\omega_n + \omega_s)} \right| + \left| \frac{A}{\omega_s} \frac{2}{T(\omega_n - \omega_s)} \right| \quad \forall \omega_n > \omega_s \\ |\varepsilon_n| \leq \left| \frac{A}{\omega_s} \frac{2}{T\omega_s} \right| \quad \forall \omega_n = \omega_s \end{array} \right.$$

Como en esa expresión todos los valores son positivos tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} |\varepsilon_n| \leq \frac{A}{\omega_s} \frac{4}{T(\omega_n + \omega_s)} + \frac{A}{\omega_s} \frac{4}{T(\omega_s - \omega_n)} \quad \forall \omega_n < \omega_s \\ |\varepsilon_n| \leq \frac{A}{\omega_s} \frac{4}{T(\omega_n + \omega_s)} + \frac{A}{\omega_s} \frac{4}{T(\omega_n - \omega_s)} \quad \forall \omega_n > \omega_s \\ |\varepsilon_n| \leq \frac{A}{\omega_s} \frac{2}{T\omega_s} \quad \forall \omega_n = \omega_s \end{array} \right.$$

y simplificando

$$\left\{ \begin{array}{l} |\varepsilon_n| \leq \frac{4A}{T\omega_s} \left(\frac{1}{\omega_n + \omega_s} + \frac{1}{\omega_s - \omega_n} \right) \quad \forall \omega_n < \omega_s \\ |\varepsilon_n| \leq \frac{4A}{T\omega_s} \left(\frac{1}{\omega_n + \omega_s} + \frac{1}{\omega_n - \omega_s} \right) \quad \forall \omega_n > \omega_s \\ |\varepsilon_n| \leq \frac{2A}{T\omega_s} \frac{1}{\omega_s} \quad \forall \omega_n = \omega_s \end{array} \right.$$

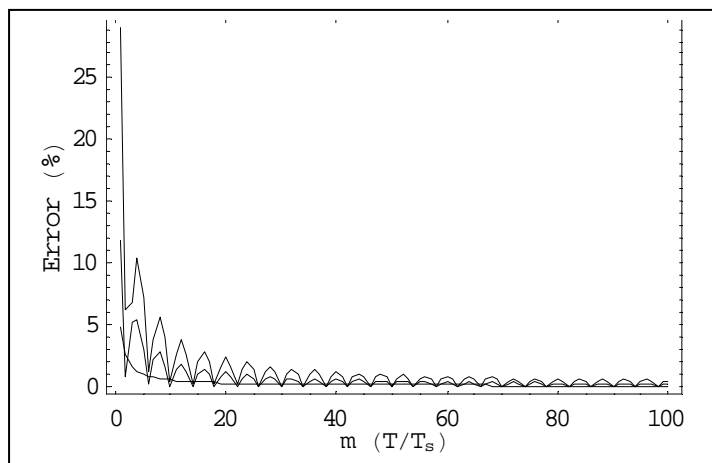
$$\left\{ \begin{array}{l} |\varepsilon_n| \leq \frac{4Af}{2\pi f_s} \left(\frac{1}{2\pi f_n + 2\pi f_s} + \frac{1}{2\pi f_s - 2\pi f_n} \right) \quad \forall 2\pi f_n < 2\pi f_s \\ |\varepsilon_n| \leq \frac{4Af}{2\pi f_s} \left(\frac{1}{2\pi f_n + 2\pi f_s} + \frac{1}{2\pi f_n - 2\pi f_s} \right) \quad \forall 2\pi f_n > 2\pi f_s \\ |\varepsilon_n| \leq \frac{2Af}{2\pi f_s} \frac{1}{2\pi f_s} \quad \forall 2\pi f_n = 2\pi f_s \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\varepsilon_n| \leq \frac{A}{m\pi^2} \left(\frac{1}{f_n + f_s} + \frac{1}{f_s - f_n} \right) \quad \forall f_n < f_s \\ |\varepsilon_n| \leq \frac{A}{m\pi^2} \left(\frac{1}{f_n + f_s} + \frac{1}{f_n - f_s} \right) \quad \forall f_n > f_s \\ |\varepsilon_n| \leq \frac{A}{2m\pi^2 f_s} \quad \forall f_n = f_s \end{array} \right.$$

Vemos que, como queríamos demostrar, cuando T crece disminuye la integral y por tanto, disminuye el error. Podemos hacer el error tan pequeño como queramos sin más que aumentar m (T/T_s), o lo que es lo mismo, la relación entre el período del tren de pulsos Sample (T) y el período de la propia función Sample (T_s). El valor de m en nuestro enunciado es 40.

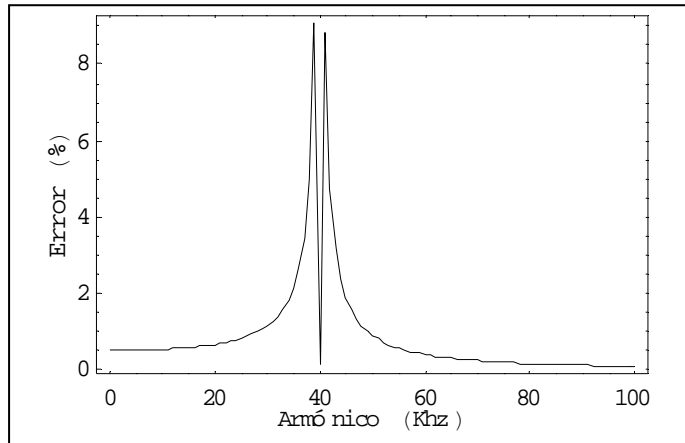
La gráfica siguiente muestra la evolución del error de la aproximación en función de m para tres armónicos (0 KHz, 10 KHz y 30 KHz). Este error se ha calculado por métodos numéricos y está expresado en porcentaje sobre el valor máximo teórico del espectro que, como vimos anteriormente, vale

$$G(\omega) = 2\pi B = \frac{AT_s}{2}$$

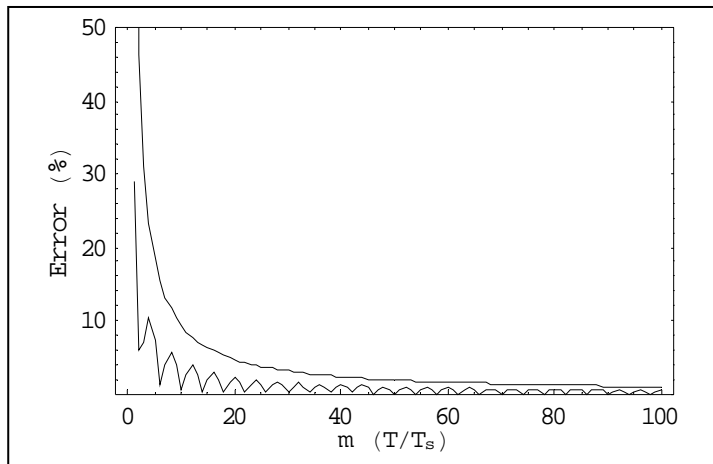


Vemos como, efectivamente, el error va disminuyendo al hacer que el período del tren de pulsos Sample (T) sea sensiblemente mayor que el período de la propia función Sample (T_s), es decir, al hacer que m crezca.

En la gráfica siguiente se muestra la evolución del error de la aproximación para los distintos armónicos ($m=40$, valor del enunciado). Se observa una singularidad del error a la frecuencia de 40 KHz (pasa del 9.08% al 0.13%). Esta frecuencia es la misma a la que se produce la singularidad del espectro. En cualquier caso, se observa que, para los datos del enunciado, el error no supera el 10% en ninguno de los armónicos.



Estos valores se encuentran por debajo de las cotas calculadas tal como puede verse en la gráfica siguiente que muestra la evolución del error de la aproximación y su cota en función de m para el armónico de 30 Khz.



De igual forma, en la gráfica inferior se muestra la evolución del error de la aproximación y su cota para los distintos armónicos ($m=40$, valor del enunciado).

