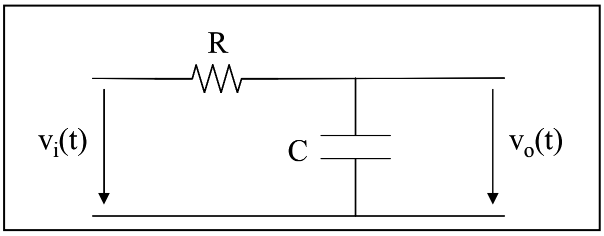
Problema PTC0004-11

Se dispone de un circuito RC como el de la figura. Calcular:

a) El espectro de amplitud del sistema (en escalas lineal y logarítmica).
b) El espectro de fase del sistema (en escalas lineal y logarítmica).
c) El retardo y el retardo de grupo del sistema (en escalas lineal y logarítmica).
d) La frecuencia de 3dB.
e) La ganancia, el desfase, el retardo y el retardo de grupo a la frecuencia de 3dB.
f) Se inyecta ahora un tren de pulsos Sample de 10 voltios de amplitud, frecuencia del tren de pulsos 1Khz y frecuencia del Sample 40 Khz. Demostrar que el espectro de la salida tiene aproximadamente la misma forma que el espectro de amplitud del sistema.

Datos: R= 1KΩ, C=100nF



Solución PTC0004-11

Trataremos en primer lugar de determinar la función de transferencia del sistema. Para ello plantearemos las ecuaciones diferenciales que modelan su comportamiento. La intensidad por el condensador será

$$i_C(t) = C\frac{dv_o(t)}{dt}$$

Por otra parte, la tensión en la resistencia es

$$v_R(t) = i_R(t)R$$

Al estar la salida del circuito abierta, la impedancia de la carga es infinita y la intensidad que circula por ella es nula, por lo que las intensidades por la resistencia y por el condensador son iguales

$$i(t) = i_C(t) = i_R(t)$$

Aplicando el cálculo de tensiones en el circuito tenemos

$$v_i(t) = v_R(t) + v_o(t)$$

y sustituyendo

$$v_i(t) = i(t)R + v_o(t)$$

$$v_i(t) = RC\frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t)$$

Esta ecuación es la que modela el comportamiento temporal del circuito. Para calcular la función de transferencia no tenemos más que recordar la expresión

$$H(\omega)=\frac{P_A(j\omega)}{P_B(j\omega)}$$

donde los polinomios P_A y P_B son los que aparecen en la ecuación diferencial que modela el comportamiento temporal del sistema, de acuerdo con

$$P_A(D)x(t)=P_B(D)y(t)$$

En nuestro caso, el comportamiento temporal se puede expresar como

$$v_i(t)=\left(RCD+1\right)v_o(t)$$

por lo que los polinomios son

$$\begin{cases} P_A(D)=1 \\ P_B(D)=RCD+1 \end{cases}$$

Sustituyendo en la expresión de la función de transferencia tenemos

$$H(\omega)=\frac{P_A(j\omega)}{P_B(j\omega)}=\frac{1}{RC(j\omega)+1}$$

$$H(\omega)=\frac{1}{1+j\omega RC}$$

o, en términos de frecuencia

$$H(f)=\frac{1}{1+j2\pi fRC}$$

Apartado a)

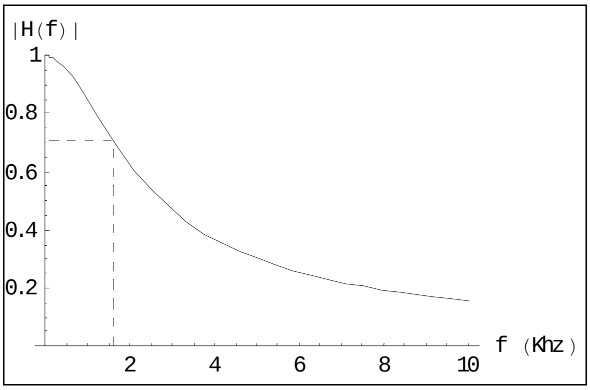


Figura 1 Espectro de amplitud (escala lineal)

Con este resultado estamos en condiciones de calcular el espectro de amplitud del sistema que no es más que

$$\left|H(\omega)\right|=\left|\frac{1}{1+j\omega RC}\right|$$

o, en términos de frecuencia

$$|H(f)| = \left| \frac{1}{1 + j2\pi fRC} \right|$$

La figura 1 representa el espectro de amplitud en escala lineal. Análogamente, la figura 2 lo representa en escala logarítmica.

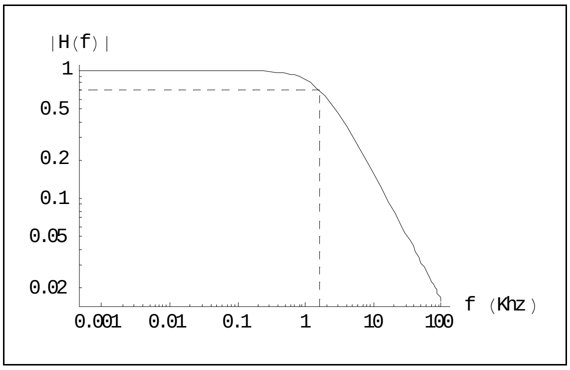


Figura 2. Espectro de amplitud (escala logarítmica)

Apartado b)

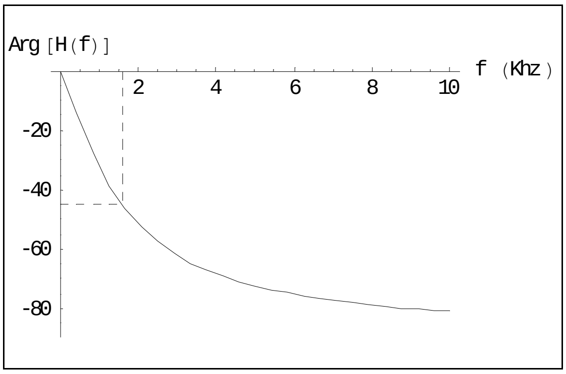


Figura 3. Espectro de fase (escala lineal)

De igual forma, el espectro de fase del sistema es

$$\arg[H(\omega)] = \arg[1] - \arg[1 + j\omega RC] = 0 - arctg\left(\frac{\omega RC}{1}\right)$$

$$\arg[H(\omega)] = -arctg(\omega RC)$$

o, en términos de frecuencia

$$\arg[H(f)] = -arctg(2\pi f RC)$$

La figura 3 representa el espectro de fase en escala lineal. Análogamente, la figura 4 lo representa en escala logarítmica.

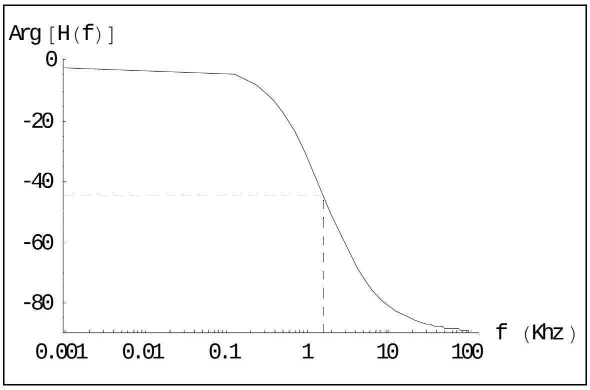


Figura 4. Espectro de fase (escala logarítmica)

Apartado c)

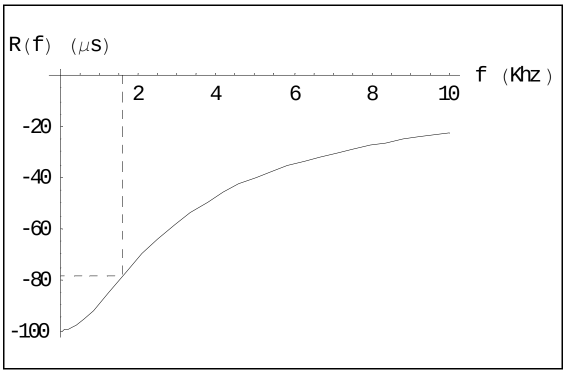


Figura 5. Retardo (escala lineal)

El retardo (en tiempo) que el sistema introduce a un armónico determinado es fácil calcularlo en función del desfase (en ángulo) que se produce, sin más que tener en cuenta que el período *T* equivale a un ángulo de *2π*, por lo que el retardo se calcula como

$$R(\omega) = \arg\left[H(\omega)\right]\frac{T}{2\pi} = \arg\left[H(\omega)\right]\frac{1}{\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)} = \frac{\arg\left[H(\omega)\right]}{\omega}$$

Recordando que

$$\arg\left[H(\omega)\right] = -arctg\left(\omega RC\right)$$

tenemos que

$$R(\omega) = \frac{-arctg\left(\omega RC\right)}{\omega}$$

En términos de frecuencia podemos escribir

$$R(f) = \frac{-arctg\left(2\pi f RC\right)}{2\pi f}$$

La figura 5 representa el retardo del sistema en escala lineal. Análogamente, la figura 6 lo representa en escala logarítmica.

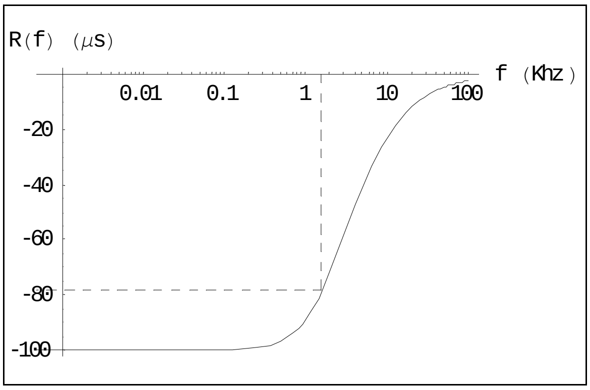


Figura 6. Retardo (escala logarítmica)

Por otra parte, el retardo de grupo se define como

$$R_g(\omega) \equiv \frac{d \arg\left[H(\omega)\right]}{d\omega}$$

Por tanto

$$R_g(\omega) = \frac{d\left[-arctg\left(\omega RC\right)\right]}{d\omega} = \frac{-RC}{1+\left(\omega RC\right)^2}$$

En términos de frecuencia podemos escribir

$$R_g(f) = \frac{-RC}{1+\left(2\pi f RC\right)^2}$$

La figura 7 representa el retardo de grupo del sistema en escala lineal. Análogamente, la figura 8 lo representa en escala logarítmica.

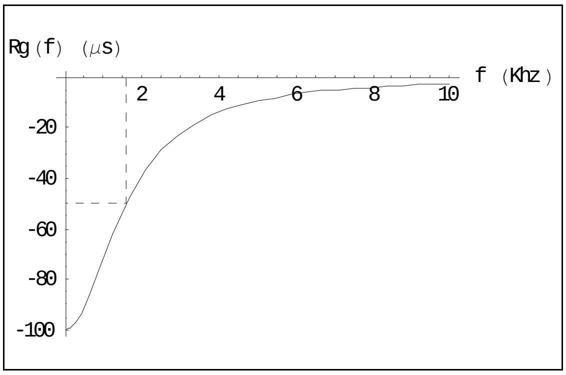


Figura 7. Retardo de grupo (escala lineal)

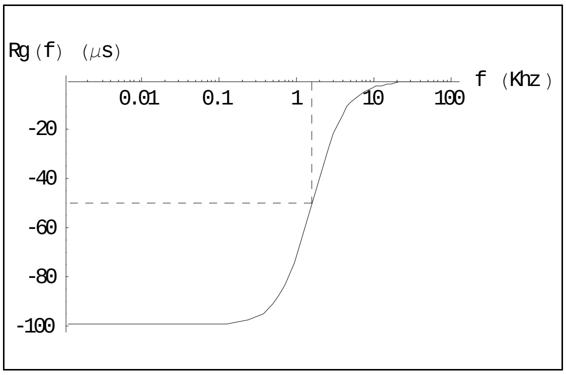


Figura 8. Retardo de grupo (escala logarítmica)

Las figuras 9 y 10 comparan el retardo y el retardo de grupo en escalas lineal y logarítmica respectívamente.

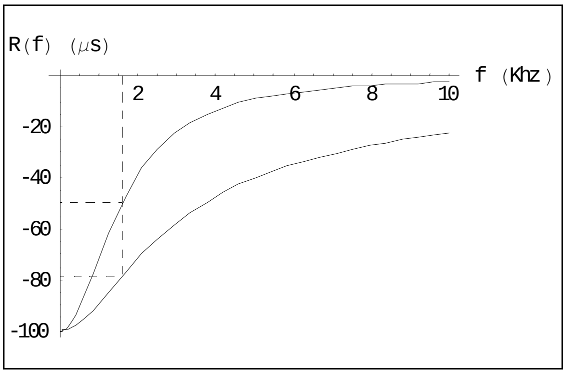


Figura 9. Retardo (línea inferior) y retardo de grupo (escala lineal)

Se observa cómo, al no ser el espectro de fase lineal, los dos retardos no coinciden. En términos absolutos, vemos que el retardo es mayor que el retardo de grupo.

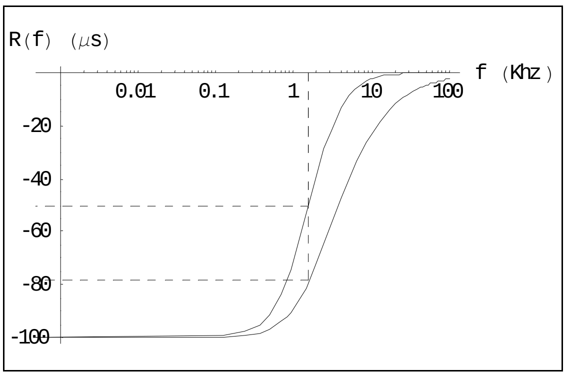


Figura 10. Retardo (línea inferior) y retardo de grupo (escala logarítmica)

Apartado d)

El ancho de banda de 3 dB, o la frecuencia de 3 dB (f_{3dB}), se define como aquella en la que la potencia de la señal se divide por 2, o lo que es lo mismo, aquella que cumple

$$\left|H(f_{3dB})\right|_{dB} = -3dB$$

$$20\log\left|\frac{1}{1+j2\pi f_{3dB}RC}\right| = -3$$

$$\left|\frac{1}{1+j2\pi f_{3dB}RC}\right| = 10^{-\frac{3}{20}} = \left(10^{-\frac{3}{10}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+\left(2\pi f_{3dB}RC\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$1+\left(2\pi f_{3dB}RC\right)^2 = 2$$

$$2\pi f_{3dB}RC = 1$$

$$f_{3dB} = \frac{1}{2\pi RC}$$

En nuestro caso tenemos

$$f_{3dB} = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi(1\cdot 10^3)(100\cdot 10^{-9})} = 1'59Khz$$

Apartado e)

Calcularemos ahora los parámetros del sistema a la frecuencia de 3 dB (f_{3dB}). En primer lugar, la ganancia del sistema es, por definición,

$$\left|H(f_{3dB})\right|_{dB} = -3dB$$

o lo que es lo mismo

$$\left|H(f_{3dB})\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0'707$$

El desfase es

$$\arg\left[H(f_{3dB})\right] = -arctg\left(2\pi f_{3dB}RC\right) = -arctg\left(2\pi\frac{1}{2\pi RC}RC\right) = -arctg\left(1\right) = -45º$$

El retardo del sistema se calcula como

$$R(f_{3dB}) = \frac{-arctg\left(2\pi f_{3dB}RC\right)}{2\pi f_{3dB}} = \frac{-arctg\left(2\pi\frac{1}{2\pi RC}RC\right)}{2\pi\frac{1}{2\pi RC}} = -arctg\left(1\right)RC = -\frac{\pi}{4}RC$$

$$R(f_{3dB}) = -78'54\mu s$$

Y, por último, el retardo de grupo es

$$R_g(f_{3dB}) = \frac{-RC}{1+\left(2\pi f_{3dB}RC\right)^2} = \frac{-RC}{1+\left(2\pi \frac{1}{2\pi RC} RC\right)^2} = \frac{-RC}{2} = \frac{-10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-9}}{2}$$

$$R_g(f_{3dB}) = -50\mu s$$

Apartado f)

Sabemos que el espectro de amplitud de un tren de pulsos Sample es aproximadamente plano (ver problema PTC0004-10) y que cada armónico vale

$$M_n \approx \frac{AT_s}{T} = \frac{10 \cdot \frac{1}{40Khz}}{\frac{1}{1Khz}} = 250mV$$

o, en valores RMS,

$$M_{nRMS} = \frac{M_n}{\sqrt{2}} \approx \frac{250mV}{\sqrt{2}} = 177mV$$

Por otra parte, si denominamos *H(ω)* a la función de transferencia del sistema, *F(ω)* a la representación espectral de la entrada y *G(ω)* a la representación espectral de la salida, tenemos que

$$H(\omega) = \frac{G(\omega)}{F(\omega)}$$

Pero si la entrada es aproximadamente constante, entonces

$$H(\omega) \approx k \cdot G(\omega)$$

es decir, que el espectro de la salida tiene aproximadamente la misma forma que la función de transferencia, difiriendo en una constante, que para representaciones RMS, toma el valor

$$k = \frac{1}{M_{nRMS}} = \frac{1}{177mV}$$