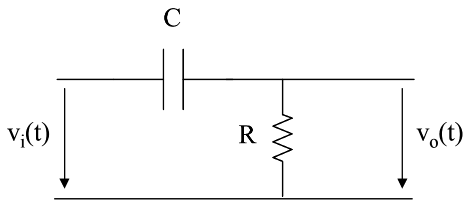
Problema PTC0004-12

Se dispone de un circuito RC como el de la figura. Calcular:

a) El espectro de amplitud del sistema (en escalas lineal y logarítmica).
b) El espectro de fase del sistema (en escalas lineal y logarítmica).
c) El retardo y el retardo de grupo del sistema (en escalas lineal y logarítmica).
d) La frecuencia de 3dB.
e) La ganancia, el desfase, el retardo y el retardo de grupo a la frecuencia de 3dB.
f) Se inyecta ahora un tren de pulsos Sample de 10 voltios de amplitud, frecuencia del tren de pulsos 200 Hz y frecuencia del Sample 8 Khz. Demostrar que el espectro de la salida tiene aproximadamente la misma forma que el espectro de amplitud del sistema.

Datos: R= 1KΩ, C=100nF



Solución PTC0004-12

Trataremos en primer lugar de determinar la función de transferencia del sistema. Para ello plantearemos las ecuaciones diferenciales que modelan su comportamiento. La intensidad por el condensador será

$$i_C(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

Por otra parte, la tensión en la resistencia es

$$v_R(t) = v_0(t) = i_R(t)R$$

o lo que es lo mismo,

$$i_R(t) = \frac{v_0(t)}{R}$$

Al estar la salida del circuito abierta, la impedancia de la carga es infinita y la intensidad que circula por ella es nula, por lo que las intensidades por la resistencia y por el condensador son iguales

$$i(t) = i_C(t) = i_R(t)$$

Aplicando el cálculo de tensiones en el circuito tenemos

$$v_i(t) = v_c(t) + v_o(t)$$

o lo que es lo mismo

$$v_c(t) = v_i(t) - v_o(t)$$

y sustituyendo

$$\begin{cases} i(t) = i_C(t) = C\dfrac{dv_c(t)}{dt} = C\dfrac{d\left[v_i(t) - v_o(t)\right]}{dt} = C\left(\dfrac{dv_i(t)}{dt} - \dfrac{dv_o(t)}{dt}\right) \\ i(t) = i_R(t) = \dfrac{v_0(t)}{R} \end{cases}$$

Igualando tenemos

$$C\left(\frac{dv_i(t)}{dt} - \frac{dv_o(t)}{dt}\right) = \frac{v_0(t)}{R}$$

$$\frac{dv_i(t)}{dt} - \frac{dv_o(t)}{dt} = \frac{v_0(t)}{RC}$$

y, finalmente

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = \frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_0(t)$$

Esta ecuación es la que modela el comportamiento temporal del circuito. Para calcular la función de transferencia no tenemos más que recordar la expresión

$$H(\omega) = \frac{P_A(j\omega)}{P_B(j\omega)}$$

donde los polinomios P_A y P_B son los que aparecen en la ecuación diferencial que modela el comportamiento temporal del sistema, de acuerdo con

$$P_A(D)x(t) = P_B(D)y(t)$$

En nuestro caso, el comportamiento temporal se puede expresar como

$$Dv_i(t) = \left(D + \frac{1}{RC}\right)v_o(t)$$

por lo que los polinomios son

$$\begin{cases} P_A(D) = D \\ P_B(D) = D + \dfrac{1}{RC} \end{cases}$$

Sustituyendo en la expresión de la función de transferencia tenemos

$$H(\omega) = \frac{P_A(j\omega)}{P_B(j\omega)} = \frac{j\omega}{j\omega + \dfrac{1}{RC}}$$

$$H(\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

o, en términos de frecuencia

$$H(f) = \frac{j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC}$$

Apartado a)

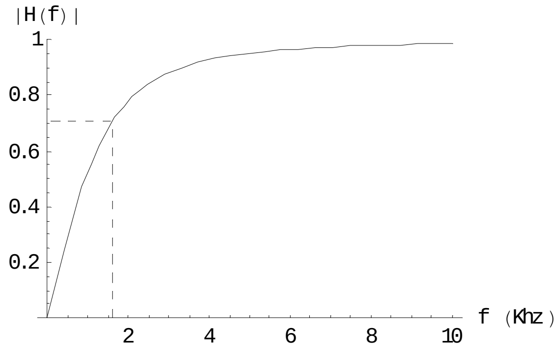


Figura 1 Espectro de amplitud (escala lineal)

Con este resultado estamos en condiciones de calcular el espectro de amplitud del sistema que no es más que

$$|H(\omega)| = \left| \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \right|$$

o, en términos de frecuencia

$$|H(f)| = \left| \frac{j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC} \right|$$

La figura 1 representa el espectro de amplitud en escala lineal. Análogamente, la figura 2 lo representa en escala logarítmica.

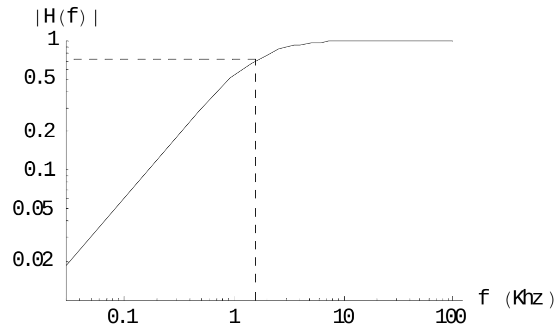


Figura 2. Espectro de amplitud (escala logarítmica)

Apartado b)

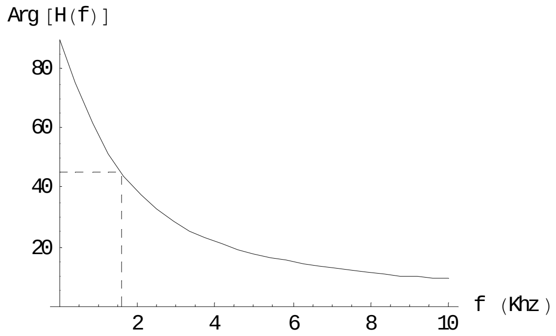


Figura 3. Espectro de fase (escala lineal)

De igual forma, el espectro de fase del sistema es

$$\arg\left[H(\omega)\right] = \arg\left[j\omega RC\right] - \arg\left[1 + j\omega RC\right] = \frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{\omega RC}{1}\right)$$

$$\arg\left[H(\omega)\right] = \frac{\pi}{2} - arctg\left(\omega RC\right)$$

o, en términos de frecuencia

$$\arg\left[H(f)\right] = \frac{\pi}{2} - arctg\left(2\pi f\, RC\right)$$

La figura 3 representa el espectro de fase en escala lineal. Análogamente, la figura 4 lo representa en escala logarítmica.

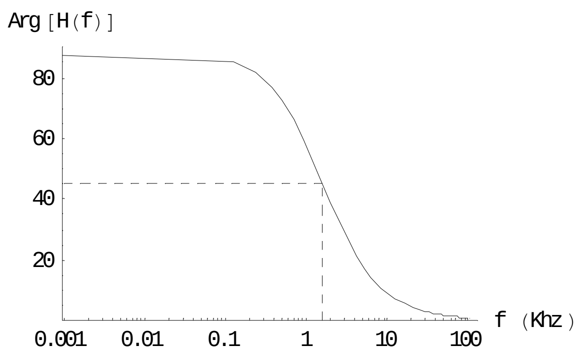


Figura 4. Espectro de fase (escala logarítmica)

Apartado c)

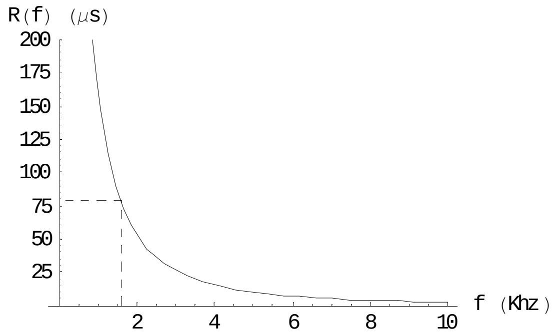


Figura 5. Retardo (escala lineal)

El retardo (en tiempo) que el sistema introduce a un armónico determinado es fácil calcularlo en función del desfase (en ángulo) que se produce, sin más que tener en cuenta que el período *T* equivale a un ángulo de *2π*, por lo que el retardo se calcula como

$$R(\omega) = \arg\left[H(\omega)\right]\frac{T}{2\pi} = \arg\left[H(\omega)\right]\frac{1}{\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)} = \frac{\arg\left[H(\omega)\right]}{\omega}$$

Recordando que

$$\arg\left[H(\omega)\right] = \frac{\pi}{2} - arctg\left(\omega RC\right)$$

tenemos que

$$R(\omega) = \frac{\dfrac{\pi}{2} - arctg\left(\omega RC\right)}{\omega}$$

En términos de frecuencia podemos escribir

$$R(f) = \frac{\dfrac{\pi}{2} - arctg\left(2\pi f RC\right)}{2\pi f}$$

La figura 5 representa el retardo del sistema en escala lineal. Análogamente, la figura 6 lo representa en escala logarítmica.

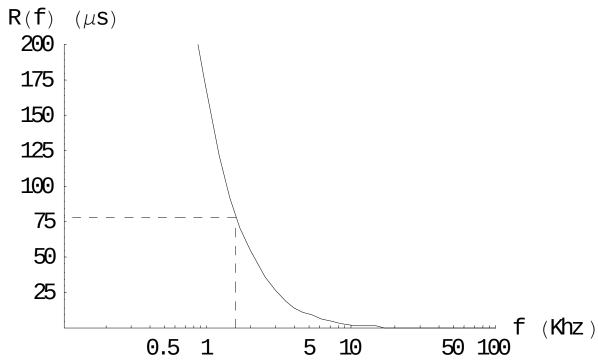


Figura 6. Retardo (escala logarítmica)

Por otra parte, el retardo de grupo se define como

$$R_g(\omega) \equiv \frac{d \arg[H(\omega)]}{d\omega}$$

Por tanto

$$R_g(\omega) = \frac{d\left[\frac{\pi}{2} - arctg(\omega RC)\right]}{d\omega} = \frac{d\left[-arctg(\omega RC)\right]}{d\omega} = \frac{-RC}{1+(\omega RC)^2}$$

En términos de frecuencia podemos escribir

$$R_g(f) = \frac{-RC}{1+(2\pi f RC)^2}$$

La figura 7 representa el retardo de grupo del sistema en escala lineal. Análogamente, la figura 8 lo representa en escala logarítmica.

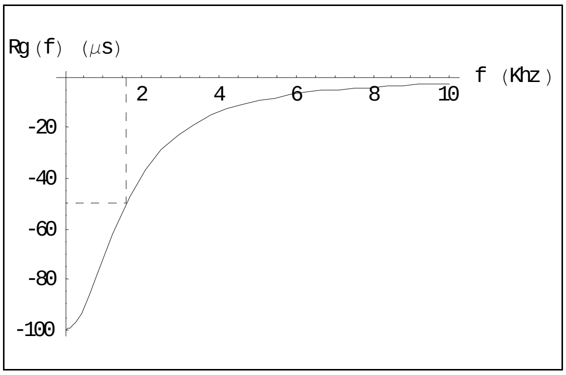


Figura 7. Retardo de grupo (escala lineal)

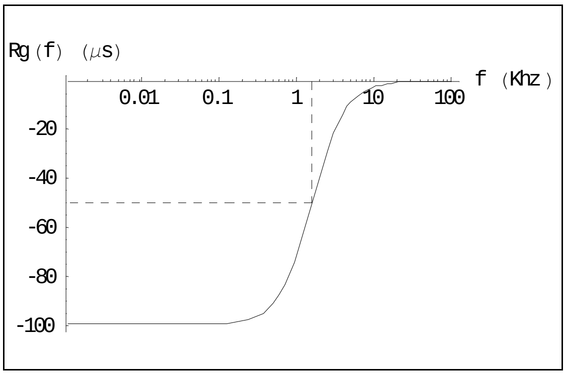


Figura 8. Retardo de grupo (escala logarítmica)

Apartado d)

La frecuencia de 3 dB (f_{3dB}), se define como aquella en la que la potencia de la señal se divide por 2, o lo que es lo mismo, aquella que cumple

$$\left|H(f_{3dB})\right|_{dB} = -3dB$$

$$20\log\left|\frac{j2\pi f_{3dB}RC}{1+j2\pi f_{3dB}RC}\right|=-3$$

$$\left|\frac{j2\pi f_{3dB}RC}{1+j2\pi f_{3dB}RC}\right|=10^{-\frac{3}{20}}=\left(10^{-\frac{3}{10}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{2\pi f_{3dB}RC}{\sqrt{1^2+\left(2\pi f_{3dB}RC\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2\pi f_{3dB}RC}\right)^2+\left(\frac{2\pi f_{3dB}RC}{2\pi f_{3dB}RC}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2\pi f_{3dB}RC}\right)^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$1+\left(\frac{1}{2\pi f_{3dB}RC}\right)^2=2$$

$$\frac{1}{2\pi f_{3dB}RC}=1$$

$$f_{3dB}=\frac{1}{2\pi RC}$$

En nuestro caso tenemos

$$f_{3dB}=\frac{1}{2\pi RC}=\frac{1}{2\pi(1\cdot 10^3)(100\cdot 10^{-9})}=1'59Khz$$

Apartado e)

Calcularemos ahora los parámetros del sistema a la frecuencia de 3 dB (f_{3dB}). En primer lugar, la ganancia del sistema es, por definición,

$$\left|H(f_{3dB})\right|_{dB}=-3dB$$

o lo que es lo mismo

$$\left|H(f_{3dB})\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}=0'707$$

El desfase es

$$\arg\left[H(f_{3dB})\right]=\frac{\pi}{2}-arctg\left(2\pi f_{3dB}RC\right)=\frac{\pi}{2}-arctg\left(2\pi\frac{1}{2\pi RC}RC\right)=\frac{\pi}{2}-arctg\left(1\right)=45º$$

El retardo del sistema se calcula como

$$R(f_{3dB})=\frac{\frac{\pi}{2}-arctg\left(2\pi f_{3dB}RC\right)}{2\pi f_{3dB}}=\frac{\frac{\pi}{2}-arctg\left(2\pi\frac{1}{2\pi RC}RC\right)}{2\pi\frac{1}{2\pi RC}}=\left(\frac{\pi}{2}-arctg\left(1\right)\right)RC=\frac{\pi}{4}RC$$

$$R(f_{3dB}) = 78'54\mu s$$

Y, por último, el retardo de grupo es

$$R_g(f_{3dB}) = \frac{-RC}{1+\left(2\pi f_{3dB} RC\right)^2} = \frac{-RC}{1+\left(2\pi \frac{1}{2\pi RC} RC\right)^2} = \frac{-RC}{2} = \frac{-10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-9}}{2}$$

$$R_g(f_{3dB}) = -50\mu s$$

Apartado f)
Sabemos que el espectro de amplitud de un tren de pulsos Sample es aproximadamente plano (ver problema PTC0004-10) y que cada armónico vale

$$M_n \approx \frac{AT_s}{T} = \frac{10 \cdot \frac{1}{8Khz}}{\frac{1}{0'2Khz}} = 250mV$$

o, en valores RMS,

$$M_{nRMS} = \frac{M_n}{\sqrt{2}} \approx \frac{250mV}{\sqrt{2}} = 177mV$$

Por otra parte, si denominamos *H(ω)* a la función de transferencia del sistema, *F(ω)* a la representación espectral de la entrada y *G(ω)* a la representación espectral de la salida, tenemos que

$$H(\omega) = \frac{G(\omega)}{F(\omega)}$$

Pero si la entrada es aproximadamente constante, entonces

$$H(\omega) \approx k \cdot G(\omega)$$

es decir, que el espectro de la salida tiene aproximadamente la misma forma que la función de transferencia, difiriendo en una constante, que para representaciones RMS, toma el valor

$$k = \frac{1}{M_{nRMS}} = \frac{1}{177mV}$$