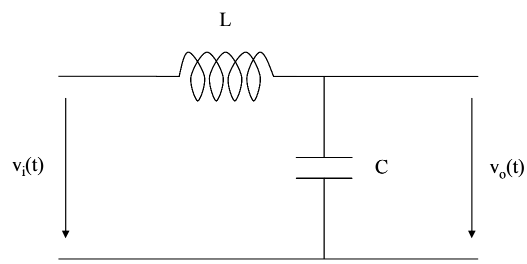
Problema PTC0004-13

Se dispone de un circuito LC como el de la figura. Calcular:

a) El espectro de amplitud del sistema (en escalas lineal y logarítmica).
b) El espectro de fase del sistema (en escalas lineal y logarítmica).
c) El retardo y el retardo de grupo del sistema (en escalas lineal y logarítmica).
d) La frecuencia de máxima ganancia y la frecuencia de 3dB.
e) Se inyecta ahora un tren de pulsos Sample de 10 voltios de amplitud, frecuencia del tren de pulsos 250 Hz y frecuencia del Sample 10 Khz. Demostrar que el espectro de la salida tiene aproximadamente la misma forma que el espectro de amplitud del sistema.

Datos: L= 10mH, C=100nF



Solución PTC0004-13

Trataremos en primer lugar de determinar la función de transferencia del sistema. Para ello plantearemos las ecuaciones diferenciales que modelan su comportamiento. La intensidad por el condensador será

$$i_C(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

Por otra parte, la tensión en la bobina es

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

Al estar la salida del circuito abierta, la impedancia de la carga es infinita y la intensidad que circula por ella es nula, por lo que las intensidades por la bobina y por el condensador son iguales

$$i(t) = i_C(t) = i_L(t)$$

Aplicando el cálculo de tensiones en el circuito tenemos

$$v_i(t) = v_L(t) + v_o(t)$$

y sustituyendo

$$v_i(t) = L\frac{di(t)}{dt} + v_o(t) = L\frac{d}{dt}\left(C\frac{dv_o(t)}{dt}\right) + v_o(t)$$

$$v_i(t) = LC\frac{d^2v_o(t)}{dt^2} + v_o(t)$$

Esta ecuación es la que modela el comportamiento temporal del circuito. Para calcular la función de transferencia no tenemos más que recordar la expresión

$$H(\omega)=\frac{P_A(j\omega)}{P_B(j\omega)}$$

donde los polinomios P_A y P_B son los que aparecen en la ecuación diferencial que modela el comportamiento temporal del sistema, de acuerdo con

$$P_A(D)x(t)=P_B(D)y(t)$$

En nuestro caso, el comportamiento temporal se puede expresar como

$$v_i(t)=\left(LCD^2+1\right)v_o(t)$$

por lo que los polinomios son

$$\begin{cases} P_A(D)=1 \\ P_B(D)=LCD^2+1 \end{cases}$$

Sustituyendo en la expresión de la función de transferencia tenemos

$$H(\omega)=\frac{P_A(j\omega)}{P_B(j\omega)}=\frac{1}{LC(j\omega)^2+1}$$

$$H(\omega)=\frac{1}{1-LC\omega^2}$$

o, en términos de frecuencia

$$H(f)=\frac{1}{1-4\pi^2LCf^2}$$

Apartado a)

Con este resultado estamos en condiciones de calcular el espectro de amplitud del sistema que no es más que

$$\left|H(\omega)\right|=\left|\frac{1}{1-LC\omega^2}\right|$$

o, en términos de frecuencia

$$\left|H(f)\right|=\left|\frac{1}{1-4\pi^2LCf^2}\right|$$

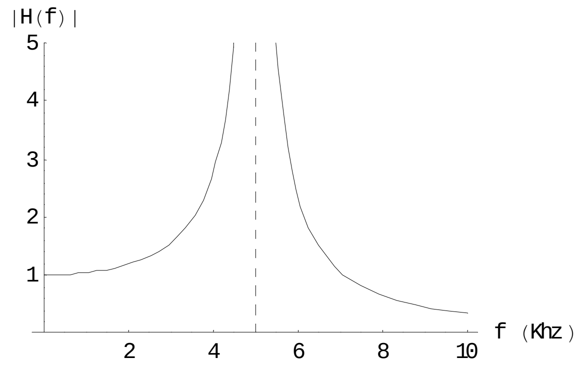


Figura 1 Espectro de amplitud (escala lineal)

La figura 1 representa el espectro de amplitud en escala lineal. Análogamente, la figura 2 lo representa en escala logarítmica.

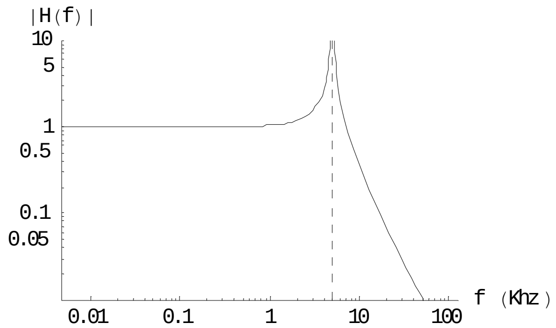


Figura 2. Espectro de amplitud (escala logarítmica)

Apartado b)
De igual forma, el espectro de fase del sistema es

$$\arg\left[H(\omega)\right] = \arg\left[1\right] - \arg\left[1 - LC\omega^2\right] = 0 - 0 = 0$$

o, en términos de frecuencia

$$\arg\left[H(f)\right] = 0$$

Apartado c)
El retardo (en tiempo) que el sistema introduce a un armónico determinado es fácil calcularlo en función del desfase (en ángulo) que se produce, sin más que tener en cuenta que el período *T* equivale a un ángulo de *2π*, por lo que el retardo se calcula como

$$R(\omega) = \arg\left[H(\omega)\right]\frac{T}{2\pi} = \arg\left[H(\omega)\right]\frac{1}{\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)} = \frac{\arg\left[H(\omega)\right]}{\omega}$$

Recordando que

$$\arg\left[H(\omega)\right] = 0$$

tenemos que

$$R(\omega) = 0$$

En términos de frecuencia podemos escribir

$$R(f) = 0$$

Por otra parte, el retardo de grupo se define como

$$R_g(\omega) \equiv \frac{d \arg\left[H(\omega)\right]}{d\omega}$$

Por tanto

$$R_g(\omega) = \frac{d\left[0\right]}{d\omega} = 0$$

En términos de frecuencia podemos escribir

$$R_g(f) = 0$$

Apartado d)

La frecuencia de máxima ganancia es aquella en la que la ganancia de este sistema es infinita, es decir,

$$\left|H(f_m)\right| = \infty$$

$$\left|H(f_m)\right| = \left|\frac{1}{1-4\pi^2 LCf_m^2}\right| = \infty$$

$$1-4\pi^2 LCf_m^2 = 0$$

$$f_m = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

expresión que, como sabemos, coincide con la de la frecuencia de resonancia. En nuestro caso

$$f_m = \frac{1}{2\pi\sqrt{\left(10\cdot 10^{-3}\right)\left(100\cdot 10^{-9}\right)}} = 5'03Khz$$

Por otra parte, el ancho de banda de 3 dB, o la frecuencia de 3 dB (f_{3dB}), se define como aquella en la que la potencia de la señal se divide por 2, o lo que es lo mismo, aquella que cumple

$$\left|H(f_{3dB})\right|_{dB} = -3dB$$

$$20\log\left|H(f_{3dB})\right| = -3$$

$$\left|H(f_{3dB})\right| = 10^{-\frac{3}{20}} = \left(10^{-\frac{3}{10}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left|\frac{1}{1-4\pi^2 LCf_{3dB}^2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left|1-4\pi^2 LCf_{3dB}^2\right| = \sqrt{2}$$

Elevando al cuadrado

$$\left(1-4\pi^2 LCf_{3dB}^2\right)^2 = 2$$

$$1+16\pi^4 L^2C^2 f_{3dB}^4 - 8\pi^2 LCf_{3dB}^2 = 2$$

$$16\pi^4 L^2C^2 f_{3dB}^4 - 8\pi^2 LCf_{3dB}^2 - 1 = 0$$

Resolviendo esa ecuación bicuadrada tenemos

$$f_{3dB}^2 = \frac{8\pi^2 LC \pm \sqrt{64\pi^4 L^2C^2 + 64\pi^4 L^2C^2}}{32\pi^4 L^2C^2} = \frac{8\pi^2 LC \pm 8\pi^2 LC\sqrt{2}}{\left(8\pi^2 LC\right)\left(4\pi^2 LC\right)} = \frac{1\pm\sqrt{2}}{4\pi^2 LC}$$

$$f_{3dB} = \sqrt{\frac{1\pm\sqrt{2}}{4\pi^2 LC}} = \frac{\sqrt{1\pm\sqrt{2}}}{2\pi\sqrt{LC}}$$

La solución con el signo menos delante de la raíz no es un número real, por lo que finalmente tenemos

$$f_{3dB} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2\pi\sqrt{LC}} = f_m\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

En nuestro caso tenemos

$$f_{3dB} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2\pi\sqrt{(10\cdot 10^{-3})(100\cdot 10^{-9})}} = 7'82Khz$$

Apartado e)

Sabemos que el espectro de amplitud de un tren de pulsos Sample es aproximadamente plano (ver problema PTC0004-10) y que cada armónico vale

$$M_n \approx \frac{AT_s}{T} = \frac{10\cdot\frac{1}{8Khz}}{\frac{1}{0'2Khz}} = 250mV$$

o, en valores RMS,

$$M_{nRMS} = \frac{M_n}{\sqrt{2}} \approx \frac{250mV}{\sqrt{2}} = 177mV$$

Por otra parte, si denominamos *H(ω)* a la función de transferencia del sistema, *F(ω)* a la representación espectral de la entrada y *G(ω)* a la representación espectral de la salida, tenemos que

$$H(\omega) = \frac{G(\omega)}{F(\omega)}$$

Pero si la entrada es aproximadamente constante, entonces

$$H(\omega) \approx k \cdot G(\omega)$$

es decir, que el espectro de la salida tiene aproximadamente la misma forma que la función de transferencia, difiriendo en una constante, que para representaciones RMS, toma el valor

$$k = \frac{1}{M_{nRMS}} = \frac{1}{177mV}$$