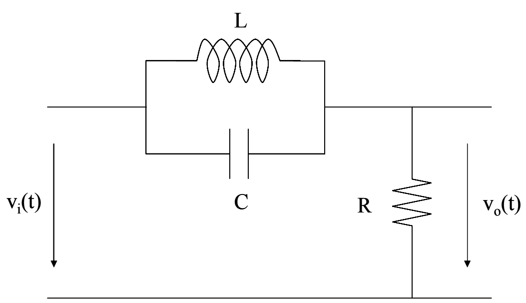
Problema PTC0004-16

Se dispone de un circuito RLC como el de la figura. Calcular:

a) El espectro de amplitud del sistema (en escalas lineal y logarítmica).
b) El espectro de fase del sistema (en escalas lineal y logarítmica).
c) El retardo y el retardo de grupo del sistema (en escalas lineal y logarítmica).
d) La frecuencia de mínima ganancia y la frecuencia de 3dB.
e) La ganancia, el desfase, el retardo y el retardo de grupo a la frecuencia de mínima ganancia.
f) Se inyecta ahora un tren de pulsos Sample de 10 voltios de amplitud, frecuencia del tren de pulsos 1Khz y frecuencia del Sample 40 Khz. Demostrar que el espectro de la salida tiene aproximadamente la misma forma que el espectro de amplitud del sistema.

Datos: R= 100Ω, L= 10mH, C=100nF



Solución PTC0004-16

Trataremos en primer lugar de determinar la función de transferencia del sistema. Para ello plantearemos las ecuaciones diferenciales que modelan su comportamiento. La intensidad por el condensador será

$$i_C(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

Por otra parte, la tensión en la resistencia es

$$v_o(t) = v_R(t) = i_R(t)R$$

y la tensión en la bobina es

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

Al estar la salida del circuito abierta, la impedancia de la carga es infinita y la intensidad que circula por ella es nula, por lo que las intensidades por la resistencia, por la bobina y por el condensador cumplen

$$i_R(t) = i_L(t) + i_C(t)$$

o, lo que es lo mismo,

$$i_L(t) = i_R(t) - i_C(t)$$

Aplicando el cálculo de tensiones en el circuito tenemos

$$v_i(t) = v_L(t) + v_o(t)$$

o, lo que es lo mismo,

$$v_L(t) = v_i(t) - v_o(t)$$

Sustituyendo en la expresión de la tensión en la bobina tenemos

$$v_i(t) - v_o(t) = v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = L\frac{d\left[i_R(t) - i_C(t)\right]}{dt} = L\frac{d\left[i_R(t)\right]}{dt} - L\frac{d\left[i_C(t)\right]}{dt}$$

$$v_i(t) - v_o(t) = L\frac{d\left[\frac{v_R(t)}{R}\right]}{dt} - L\frac{d\left[C\frac{dv_c(t)}{dt}\right]}{dt} = L\frac{d\left[\frac{v_o(t)}{R}\right]}{dt} - L\frac{d\left[C\frac{d\left\{v_i(t) - v_o(t)\right\}}{dt}\right]}{dt}$$

$$v_i(t) - v_o(t) = \frac{L}{R}\frac{dv_o(t)}{dt} - LC\left[\frac{d^2v_i(t)}{dt^2} - \frac{d^2v_o(t)}{dt^2}\right] = \frac{L}{R}\frac{dv_o(t)}{dt} - LC\frac{d^2v_i(t)}{dt^2} + LC\frac{d^2v_o(t)}{dt^2}$$

Ordenando nos queda finalmente

$$v_i(t) + LC\frac{d^2v_i(t)}{dt^2} = v_o(t) + \frac{L}{R}\frac{dv_o(t)}{dt} + LC\frac{d^2v_o(t)}{dt^2}$$

Esta ecuación es la que modela el comportamiento temporal del circuito. Para calcular la función de transferencia no tenemos más que recordar la expresión

$$H(\omega) = \frac{P_A(j\omega)}{P_B(j\omega)}$$

donde los polinomios P_A y P_B son los que aparecen en la ecuación diferencial que modela el comportamiento temporal del sistema, de acuerdo con

$$P_A(D)x(t) = P_B(D)y(t)$$

En nuestro caso, el comportamiento temporal se puede expresar como

$$\left(LCD^2 + 1\right)v_i(t) = \left(LCD^2 + \frac{L}{R}D + 1\right)v_o(t)$$

por lo que los polinomios son

$$\begin{cases} P_A(D) = LCD^2 + 1 \\ P_B(D) = LCD^2 + \dfrac{L}{R}D + 1 \end{cases}$$

Sustituyendo en la expresión de la función de transferencia tenemos

$$H(\omega) = \frac{P_A(j\omega)}{P_B(j\omega)} = \frac{LC(j\omega)^2 + 1}{LC(j\omega)^2 + \frac{L}{R}(j\omega) + 1}$$

$$H(\omega)=\frac{1-LC\omega^2}{\left(1-LC\omega^2\right)+j\omega\frac{L}{R}}$$

o, en términos de frecuencia

$$H(f)=\frac{1-4\pi^2LCf^2}{\left(1-4\pi^2LCf^2\right)+j2\pi f\frac{L}{R}}$$

Apartado a)

Con este resultado estamos en condiciones de calcular el espectro de amplitud del sistema que no es más que

$$\left|H(\omega)\right|=\left|\frac{1-LC\omega^2}{\left(1-LC\omega^2\right)+j\omega\frac{L}{R}}\right|$$

o, en términos de frecuencia

$$\left|H(f)\right|=\left|\frac{1-4\pi^2LCf^2}{\left(1-4\pi^2LCf^2\right)+j2\pi f\frac{L}{R}}\right|$$

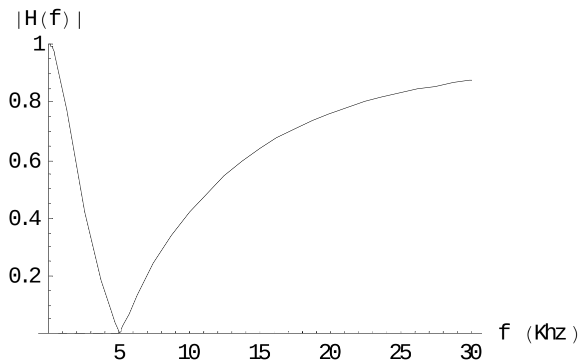


Figura 1 Espectro de amplitud (escala lineal)

La figura 1 representa el espectro de amplitud en escala lineal. Análogamente, la figura 2 lo representa en escala logarítmica.

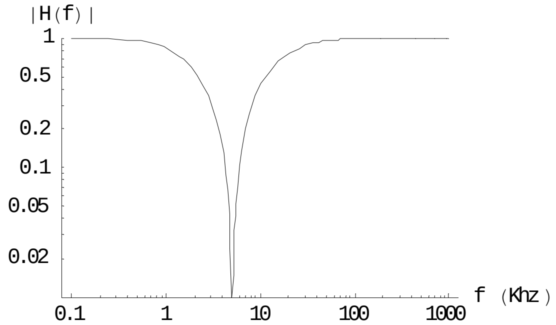


Figura 2. Espectro de amplitud (escala logarítmica)

Apartado b)

$$H(\omega)=\frac{1-LC\omega^2}{\left(1-LC\omega^2\right)+j\omega\frac{L}{R}}$$

De igual forma, el espectro de fase del sistema se puede calcular a partir de la función de transferencia que, como sabemos, vale

$$H(\omega)=\frac{1-LC\omega^2}{\left(1-LC\omega^2\right)+j\omega\frac{L}{R}}=\frac{1}{1+j\dfrac{\omega\frac{L}{R}}{1-LC\omega^2}}$$

Por tanto,

$$\arg\left[H(\omega)\right]=\arg\left[1\right]-\arg\left[1+j\frac{\omega\frac{L}{R}}{1-LC\omega^2}\right]=0-arctg\left(\frac{\omega\frac{L}{R}}{1-LC\omega^2}\right)$$

$$\arg\left[H(\omega)\right]=-arctg\left(\frac{\omega L}{R-RLC\omega^2}\right)$$

o, en términos de frecuencia

$$\arg\left[H(f)\right]=-arctg\left(\frac{2\pi f L}{R-RLC4\pi^2 f^2}\right)$$

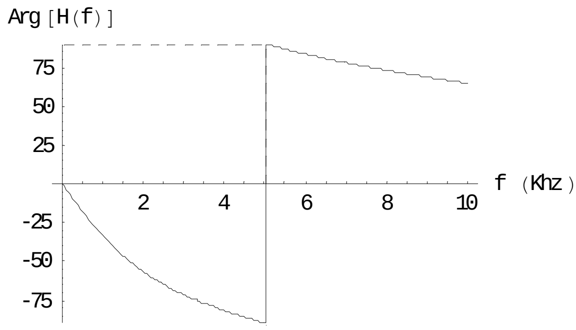


Figura 3. Espectro de fase (escala lineal)

La figura 3 representa el espectro de fase en escala lineal. Análogamente, la figura 4 lo representa en escala logarítmica.

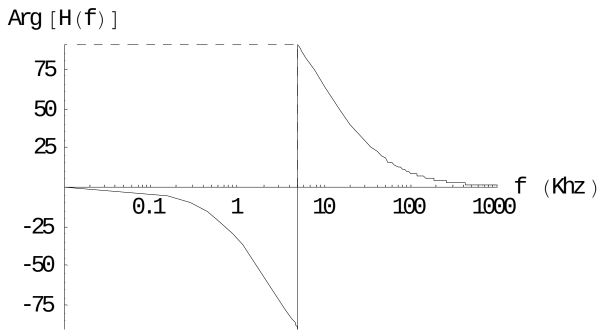


Figura 4. Espectro de fase (escala logarítmica)

Apartado c)

El retardo (en tiempo) que el sistema introduce a un armónico determinado es fácil calcularlo en función del desfase (en ángulo) que se produce, sin más que tener en cuenta que el período *T* equivale a un ángulo de *2π*, por lo que el retardo se calcula como

$$R(\omega) = \arg\left[H(\omega)\right]\frac{T}{2\pi} = \arg\left[H(\omega)\right]\frac{1}{\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)} = \frac{\arg\left[H(\omega)\right]}{\omega}$$

Recordando que

$$\arg\left[H(\omega)\right] = -arctg\left(\frac{\omega L}{R - RLC\omega^2}\right)$$

tenemos que

$$R(\omega) = \frac{-arctg\left(\dfrac{\omega L}{R - RLC\omega^2}\right)}{\omega}$$

En términos de frecuencia podemos escribir

$$R(f)=\frac{-arctg\left(\frac{2\pi f L}{R-RLC4\pi^2 f^2}\right)}{2\pi f}$$

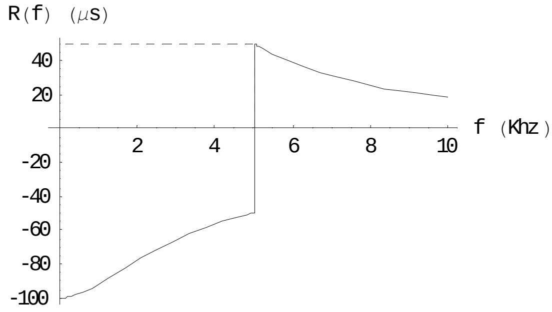


Figura 5. Retardo (escala lineal)

La figura 5 representa el retardo del sistema en escala lineal. Análogamente, la figura 6 lo representa en escala logarítmica.

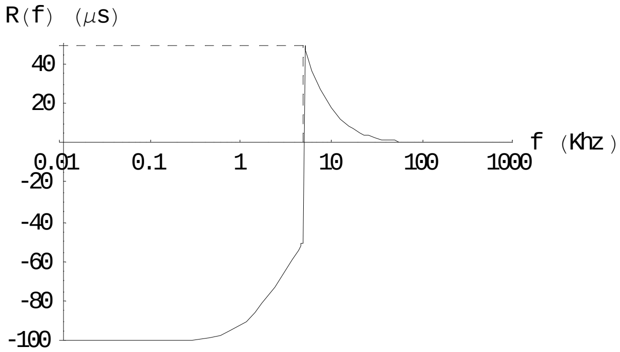


Figura 6. Retardo (escala logarítmica)

Por otra parte, el retardo de grupo se define como

$$R_g(\omega)\equiv\frac{d\arg\left[H(\omega)\right]}{d\omega}$$

Por tanto

$$R_g(\omega)=\frac{d\left[-arctg\left(\frac{\omega L}{R-RLC\omega^2}\right)\right]}{d\omega}$$

$$R_g(\omega)=\frac{-1}{1+\left(\frac{\omega L}{R-RLC\omega^2}\right)^2}\frac{d\left(\frac{\omega L}{R-RLC\omega^2}\right)}{d\omega}$$

$$R_g(\omega) = \frac{-1}{\dfrac{\left(R - RLC\omega^2\right)^2 + \left(\omega L\right)^2}{\left(R - RLC\omega^2\right)^2}} \frac{\left(R - RLC\omega^2\right)L - \omega L\left(-2RLC\omega\right)}{\left(R - RLC\omega^2\right)^2}$$

$$R_g(\omega) = \frac{-\left(RL - RL^2C\omega^2 + 2RL^2C\omega^2\right)}{\left(R - RLC\omega^2\right)^2 + \left(\omega L\right)^2}$$

$$R_g(\omega) = \frac{-\left(RL + RL^2C\omega^2\right)}{\left(R - RLC\omega^2\right)^2 + \left(\omega L\right)^2}$$

En términos de frecuencia podemos escribir

$$R_g(f) = \frac{-\left(RL + RL^2C4\pi^2 f^2\right)}{\left(R - RLC4\pi^2 f^2\right)^2 + \left(2\pi f L\right)^2}$$

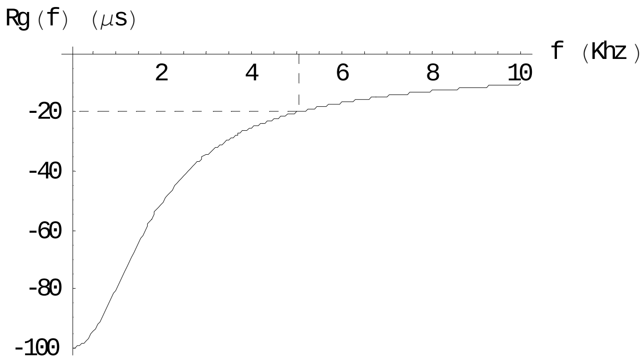


Figura 7. Retardo de grupo (escala lineal)

La figura 7 representa el retardo de grupo del sistema en escala lineal. Análogamente, la figura 8 lo representa en escala logarítmica.

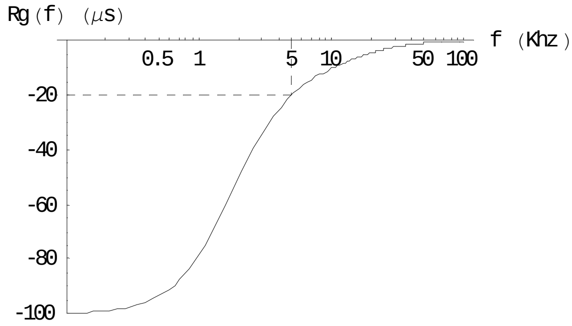


Figura 8. Retardo de grupo (escala logarítmica)

Apartado d)

La frecuencia de mínima ganancia (f_m) es aquella que hace que la ganancia del sistema sea nula, es decir, cuando

$$|H(\omega_m)| = \left| \frac{1 - LC\omega_m^2}{\left(1 - LC\omega_m^2\right) + j\omega_m \frac{L}{R}} \right| = \frac{1 - LC\omega_m^2}{\sqrt{\left(1 - LC\omega_m^2\right)^2 + \left(\omega_m \frac{L}{R}\right)^2}} = 0$$

o lo que es lo mismo, cuando se anula el numerador de la anterior fracción

$$1 - LC\omega_m^2 = 0$$

$$\omega_m^2 = \frac{1}{LC}$$

y, finalmente,

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

o en términos de frecuencia

$$f_m = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

que coincide con la frecuencia de resonancia del circuito. En nuestro caso tenemos

$$f_m = \frac{1}{2\pi\sqrt{\left(10 \cdot 10^{-3}\right)\left(100 \cdot 10^{-9}\right)}} = 5'03Khz$$

Por otra parte, el ancho de banda de 3 dB, o la frecuencia de 3 dB (f_{3dB}), se define como aquella en la que la potencia de la señal se divide por 2, o lo que es lo mismo, aquella que cumple

$$|H(f_{3dB})|_{dB} = -3dB$$

$$20\log|H(f_{3dB})| = -3$$

$$|H(f_{3dB})| = 10^{-\frac{3}{20}} = \left(10^{-\frac{3}{10}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left| \frac{1 - 4\pi^2 LCf_{3dB}^2}{\left(1 - 4\pi^2 LCf_{3dB}^2\right) + j2\pi f_{3dB} \frac{L}{R}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1-4\pi^2 LCf_{3dB}^2}{\sqrt{\left(1-4\pi^2 LCf_{3dB}^2\right)^2+\left(2\pi f_{3dB}\frac{L}{R}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\left(2\pi f_{3dB}\frac{L}{R}\right)^2}{1-4\pi^2 LCf_{3dB}^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{1+\frac{\left(2\pi f_{3dB}\frac{L}{R}\right)^2}{1-4\pi^2 LCf_{3dB}^2}}=\sqrt{2}$$

Elevando al cuadrado

$$1+\frac{\left(2\pi f_{3dB}\frac{L}{R}\right)^2}{1-4\pi^2 LCf_{3dB}^2}=2$$

$$\frac{\left(2\pi f_{3dB}\frac{L}{R}\right)^2}{1-4\pi^2 LCf_{3dB}^2}=1$$

$$\left(2\pi f_{3dB}\frac{L}{R}\right)^2=\left(1-4\pi^2 LCf_{3dB}^2\right)^2$$

$$4\pi^2\frac{L^2}{R^2}f_{3dB}^2=1+16\pi^4L^2C^2f_{3dB}^4-8\pi^2LCf_{3dB}^2$$

$$16\pi^4L^2C^2f_{3dB}^4-\left(8\pi^2LC+4\pi^2\frac{L^2}{R^2}\right)f_{3dB}^2+1=0$$

Resolviendo esa ecuación bicuadrada tenemos

$$f_{3dB}^2=\frac{\left(8\pi^2LC+4\pi^2\frac{L^2}{R^2}\right)\pm\sqrt{\left(8\pi^2LC+4\pi^2\frac{L^2}{R^2}\right)^2-64\pi^4L^2C^2}}{32\pi^4L^2C^2}$$

$$f_{3dB}^2=\frac{\left(8\pi^2LC+4\pi^2\frac{L^2}{R^2}\right)\pm\sqrt{64\pi^4L^2C^2+16\pi^4\frac{L^4}{R^4}+64\pi^4\frac{L^3C}{R^2}-64\pi^4L^2C^2}}{32\pi^4L^2C^2}$$

$$f_{3dB}^2 = \frac{\left(8\pi^2 LC + 4\pi^2 \frac{L^2}{R^2}\right) \pm \sqrt{16\pi^4 \frac{L^4}{R^4} + 64\pi^4 \frac{L^3 C}{R^2}}}{32\pi^4 L^2 C^2}$$

$$f_{3dB}^2 = \frac{\left(8\pi^2 LC + 4\pi^2 \frac{L^2}{R^2}\right) \pm 4\pi^2 \sqrt{\frac{L^4}{R^4} + 4 \frac{L^3 C}{R^2}}}{32\pi^4 L^2 C^2}$$

$$f_{3dB}^2 = \frac{\left(2LC + \frac{L^2}{R^2}\right) \pm \sqrt{\frac{L^4}{R^4} + 4 \frac{L^3 C}{R^2}}}{8\pi^2 L^2 C^2}$$

En esta expresión es válida tanto para el signo positivo como para el negativo delante de la raíz, por lo que existen dos soluciones. Por tanto, las frecuencias de 3dB son, finalmente

$$f_{3dB} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\left(2LC + \frac{L^2}{R^2}\right) \pm \sqrt{\frac{L^4}{R^4} + 4 \frac{L^3 C}{R^2}}}{2L^2 C^2}}$$

En nuestro caso tenemos, sustituyendo

$$f_{3dB} = \begin{cases} 1'46 Khz \\ 17'37 Khz \end{cases}$$

es decir, que el ancho de banda de 3 dB es

$$B_{3dB} = 15'92 Khz$$

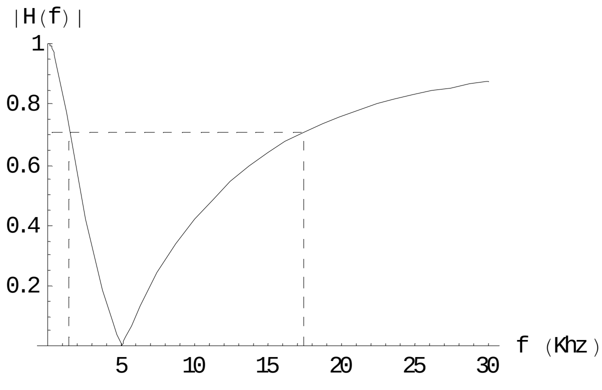


Figura 9 Espectro de amplitud (escala lineal)

La figura 9 representa el espectro de amplitud en escala lineal señalándose las frecuencias de 3dB. Análogamente, la figura 10 lo representa en escala logarítmica.

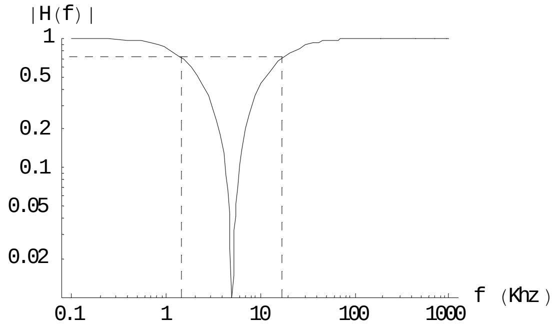


Figura 10. Espectro de amplitud (escala logarítmica)

Apartado e)
Calcularemos ahora los parámetros del sistema a la frecuencia de mínima ganancia (f_m).
En primer lugar, la ganancia del sistema es

$$|H(\omega_m)| = \left| \frac{1 - LC\omega_m^2}{\left(1 - LC\omega_m^2\right) + j\omega_m \frac{L}{R}} \right| = \frac{1 - LC\omega_m^2}{\sqrt{\left(1 - LC\omega_m^2\right)^2 + \left(\omega_m \frac{L}{R}\right)^2}}$$

$$|H(\omega_m)| = \frac{1 - LC\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - LC\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{L}{R}\right)^2}}$$

$$|H(\omega_m)| = \frac{1 - LC\frac{1}{LC}}{\sqrt{\left(1 - LC\frac{1}{LC}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{L}{R}\right)^2}} = 0$$

El desfase es

$$\arg\left[H(\omega_m)\right] = -arctg\left(\frac{\omega_m L}{R - RLC\omega_m^2}\right)$$

$$\arg\left[H(\omega_m)\right] = -arctg\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{LC}} L}{R - RLC\frac{1}{LC}}\right)$$

$$\arg\left[H(\omega_m)\right] = -arctg\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}L}{0}\right) = -arctg\left(\infty\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arg\left[H(\omega_m)\right] = -\frac{\pi}{2}$$

El retardo del sistema se calcula como

$$R(\omega_m) = \frac{\arg\left[H(\omega_m)\right]}{\omega_m} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} = -\frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$$

En nuestro caso

$$R(\omega_m) = -\frac{\pi}{2}\sqrt{\left(10\cdot 10^{-3}\right)\left(100\cdot 10^{-9}\right)} = -\frac{\pi}{2}\sqrt{10^{-9}}$$

$$R(\omega_m) = 49'67\mu s$$

El retardo de grupo del sistema a la frecuencia de mínima ganancia se calcula como

$$R_g(\omega_m) = \frac{-\left(RL + RL^2C\omega_m^2\right)}{\left(R - RLC\omega_m^2\right)^2 + \left(\omega_m L\right)^2}$$

$$R_g(\omega_m) = \frac{-\left[RL + RL^2C\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2\right]}{\left[R - RLC\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2\right]^2 + \left[\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)L\right]^2}$$

$$R_g(\omega_m) = \frac{-\left[RL + RL^2C\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2\right]}{\left[R - RLC\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2\right]^2 + \left[\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)L\right]^2} = \frac{-\left[RL + RL\right]}{\left[R - R\right]^2 + \frac{L}{C}} = \frac{-2RL}{\frac{L}{C}}$$

$$R_g(\omega_m) = -2RC$$

En nuestro caso

$$R_g(\omega_m) = -2\cdot 100\left(100\cdot 10^{-9}\right) = -2\cdot 10^{-5} = -20\mu s$$

Apartado f)

Sabemos que el espectro de amplitud de un tren de pulsos Sample es aproximadamente plano (ver problema PTC0004-10) y que cada armónico vale

$$M_n \approx \frac{AT_s}{T} = \frac{10 \cdot \frac{1}{40Khz}}{\frac{1}{1Khz}} = 250mV$$

o, en valores RMS,

$$M_{nRMS} = \frac{M_n}{\sqrt{2}} \approx \frac{250mV}{\sqrt{2}} = 177mV$$

Por otra parte, si denominamos *H(ω)* a la función de transferencia del sistema, *F(ω)* a la representación espectral de la entrada y *G(ω)* a la representación espectral de la salida, tenemos que

$$H(\omega) = \frac{G(\omega)}{F(\omega)}$$

Pero si la entrada es aproximadamente constante, entonces

$$H(\omega) \approx k \cdot G(\omega)$$

es decir, que el espectro de la salida tiene aproximadamente la misma forma que la función de transferencia, difiriendo en una constante, que para representaciones RMS, toma el valor

$$k = \frac{1}{M_{nRMS}} = \frac{1}{177mV}$$