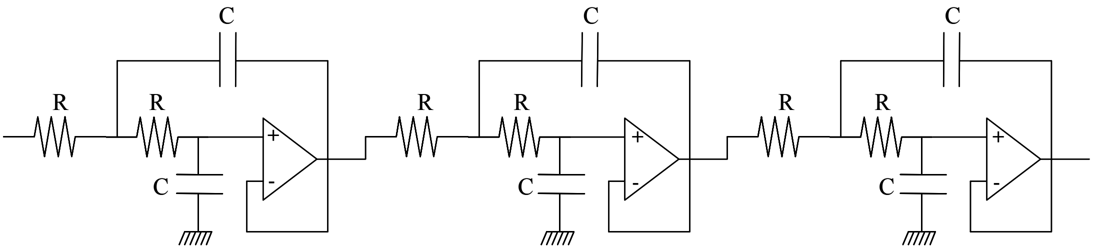
Problema PTC0004-17

Se dispone de un sistema como el de la figura. Calcular:

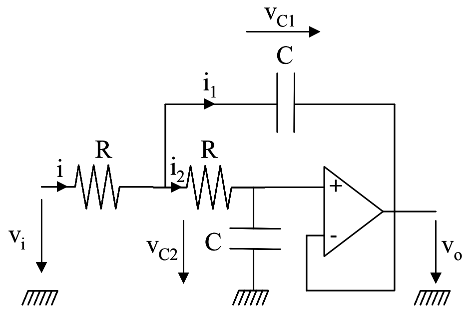
a) El espectro de amplitud del sistema (en escalas lineal y logarítmica).
b) El espectro de fase del sistema (en escalas lineal y logarítmica).
c) El retardo y el retardo de grupo del sistema (en escalas lineal y logarítmica).
d) La frecuencia de 3dB.
e) La ganancia, el desfase, el retardo y el retardo de grupo a la frecuencia de 3dB.
f) Se inyecta ahora un tren de pulsos Sample de 10 voltios de amplitud, frecuencia del tren de pulsos 1Khz y frecuencia del Sample 40 Khz. Demostrar que el espectro de la salida tiene aproximadamente la misma forma que el espectro de amplitud del sistema.

Datos: R= 1KΩ, C=3’3nF



Solución PTC0004-17

Trataremos en primer lugar de determinar la función de transferencia del sistema. Para ello plantearemos las ecuaciones diferenciales que modelan su comportamiento. Como podemos comprobar el circuito está formado por tres etapas idénticas que, al estar constituidas por amplificadores operacionales (que consideraremos ideales), pueden estudiarse de forma independiente cada una de ellas. Así pues, la primera etapa responde al circuito de la figura



Si el amplificador operacional es ideal, las intensidades de entrada por sus terminales inversor y no inversor son nulas, y la tensión entre ambos terminales es nula (cortocircuito virtual). Por lo tanto

$$v_{c2}(t) = v_o(t)$$

Las tensiones en la malla formada por los dos condensadores y la resistencia interior cumplen que

$$i_2(t)R + v_{c2}(t) = v_{c1}(t) + v_o(t)$$

o lo que es lo mismo,

$$v_{c1}(t) = i_2(t)R$$

La intensidad por el condensador de la rama superior será

$$i_1(t) = C\frac{dv_{c1}(t)}{dt} = C\frac{d\left[i_2(t)R\right]}{dt} = RC\frac{di_2(t)}{dt}$$

La intensidad por el condensador de la rama inferior será

$$i_2(t) = C\frac{dv_{c2}(t)}{dt} = C\frac{dv_o(t)}{dt}$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior tenemos que

$$i_1(t) = RC\frac{di_2(t)}{dt} = RC\frac{d}{dt}\left[C\frac{dv_o(t)}{dt}\right] = RC^2\frac{d^2v_o(t)}{dt^2}$$

Por otra parte, las tensiones en la malla formada por la primera resistencia y el condensador de la rama superior cumplen que

$$v_i(t) = i(t)R + v_{c1}(t) + v_o(t)$$

$$v_i(t) = i(t)R + i_2(t)R + v_o(t)$$

$$v_i(t) = \left[i_1(t) + i_2(t)\right]R + i_2(t)R + v_o(t) = i_1(t)R + i_2(t)R + i_2(t)R + v_o(t)$$

$$v_i(t) = i_1(t)R + 2i_2(t)R + v_o(t)$$

Sustituyendo los valores de las intensidades calculadas anteriormente tenemos

$$v_i(t) = R\left[RC^2\frac{d^2v_o(t)}{dt^2}\right] + 2R\left[C\frac{dv_o(t)}{dt}\right] + v_o(t)$$

$$v_i(t) = R^2C^2\frac{d^2v_o(t)}{dt^2} + 2RC\frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t)$$

Esta ecuación es la que modela el comportamiento temporal del circuito. Para calcular la función de transferencia de la primera etapa no tenemos más que recordar la expresión

$$H_1(\omega) = \frac{P_A(j\omega)}{P_B(j\omega)}$$

donde los polinomios P_A y P_B son los que aparecen en la ecuación diferencial que modela el comportamiento temporal del sistema, de acuerdo con

$$P_A(D)x(t) = P_B(D)y(t)$$

En nuestro caso, el comportamiento temporal se puede expresar como

$$v_i(t) = \left(R^2C^2D^2 + 2RCD + 1\right)v_o(t)$$

o lo que es lo mismo

$$v_i(t) = (1 + RCD)^2 v_o(t)$$

por lo que los polinomios son

$$\begin{cases} P_A(D) = 1 \\ P_B(D) = (1 + RCD)^2 \end{cases}$$

Sustituyendo en la expresión de la función de transferencia tenemos

$$H_1(\omega) = \frac{P_A(j\omega)}{P_B(j\omega)} = \frac{1}{(1 + RCj\omega)^2}$$

y ordenando

$$H_1(\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega RC)^2}$$

Esta es la función de transferencia de la primera etapa y, como todas son iguales, también de las dos etapas siguientes, es decir,

$$H_1(\omega) = H_2(\omega) = H_3(\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega RC)^2}$$

Expresando las tensiones a la entrada y salida de cada etapa en el dominio de la frecuencia tenemos que

$$V_{o1}(\omega) = H_1(\omega) \cdot V_{i1}(\omega); \quad V_{o2}(\omega) = H_2(\omega) \cdot V_{i2}(\omega); \quad V_{o3}(\omega) = H_3(\omega) \cdot V_{i3}(\omega)$$

Por otra parte,

$$V_i(\omega) = V_{i1}(\omega); \quad V_{o1}(\omega) = V_{i2}(\omega); \quad V_{o2}(\omega) = V_{i3}(\omega); \quad V_o(\omega) = V_{o3}(\omega)$$

por lo que sustituyendo sucesivamente tenemos

$$V_o(\omega) = V_{o3}(\omega) = H_3(\omega) \cdot V_{i3}(\omega) = H_3(\omega) \cdot V_{o2}(\omega)$$

$$V_o(\omega) = H_3(\omega) \cdot \left[H_2(\omega) \cdot V_{i2}(\omega)\right] = H_3(\omega) \cdot H_2(\omega) \cdot V_{o1}(\omega)$$

$$V_o(\omega) = H_3(\omega) \cdot H_2(\omega) \cdot \left[H_1(\omega) \cdot V_{i1}(\omega)\right] = H_3(\omega) \cdot H_2(\omega) \cdot H_1(\omega) \cdot V_{i1}(\omega)$$

$$V_o(\omega) = H_3(\omega) \cdot H_2(\omega) \cdot H_1(\omega) \cdot V_i(\omega)$$

Por tanto, la función de transferencia conjunta (de las tres etapas) será

$$H(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)} = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega) \cdot H_3(\omega)$$

$$H(\omega)=\frac{1}{(1+j\omega RC)^2}\cdot\frac{1}{(1+j\omega RC)^2}\cdot\frac{1}{(1+j\omega RC)^2}=\left[\frac{1}{(1+j\omega RC)^2}\right]^3$$

$$H(\omega)=\frac{1}{(1+j\omega RC)^6}$$

o, en términos de frecuencia

$$H(f)=\frac{1}{(1+j2\pi f RC)^6}$$

Apartado a)

Con este resultado estamos en condiciones de calcular el espectro de amplitud del sistema que no es más que

$$|H(\omega)|=\left|\frac{1}{(1+j\omega RC)^6}\right|$$

o, en términos de frecuencia

$$|H(f)|=\left|\frac{1}{(1+j2\pi f RC)^6}\right|=\left|\frac{1}{(1+j2\pi f RC)}\right|^6$$

$$|H(f)|=\frac{1}{|(1+j2\pi f RC)|^6}=\frac{1}{\left[\sqrt{1+(2\pi f RC)^2}\right]^6}$$

$$|H(f)|=\frac{1}{\left[1+(2\pi f RC)^2\right]^3}$$

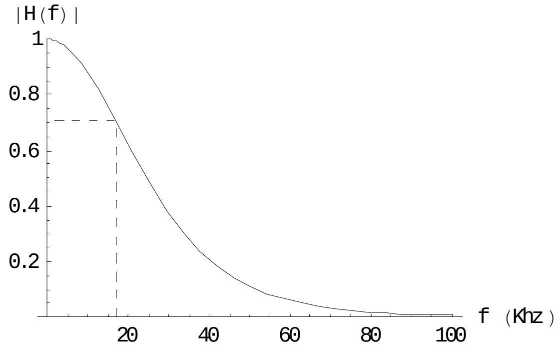


Figura 1 Espectro de amplitud (escala lineal)

La figura 1 representa el espectro de amplitud en escala lineal. Análogamente, la figura 2 lo representa en escala logarítmica.

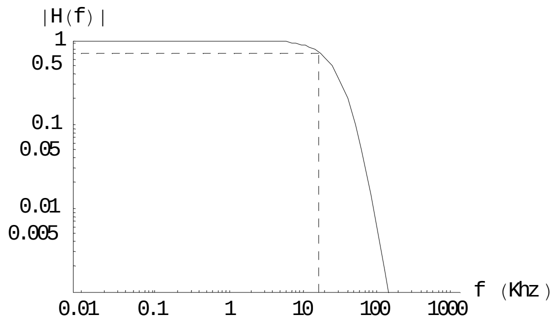


Figura 2. Espectro de amplitud (escala logarítmica)

Apartado b)
De igual forma, el espectro de fase del sistema es

$$\arg\left[H(\omega)\right]=\arg\left[\frac{1}{\left(1+j\omega RC\right)^{6}}\right]=-\arg\left[\left(1+j\omega RC\right)^{6}\right]=-6\cdot\arg\left[1+j\omega RC\right]$$

$$\arg\left[H(\omega)\right]=-6\cdot arctg\left(\omega RC\right)$$

o, en términos de frecuencia

$$\arg\left[H(f)\right]=-6\cdot arctg\left(2\pi f\,RC\right)$$

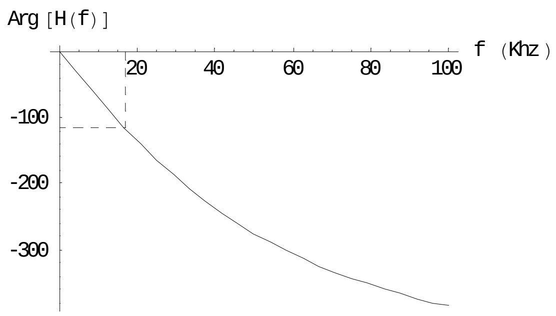


Figura 3. Espectro de fase (escala lineal)

La figura 3 representa el espectro de fase en escala lineal. Análogamente, la figura 4 lo representa en escala logarítmica.

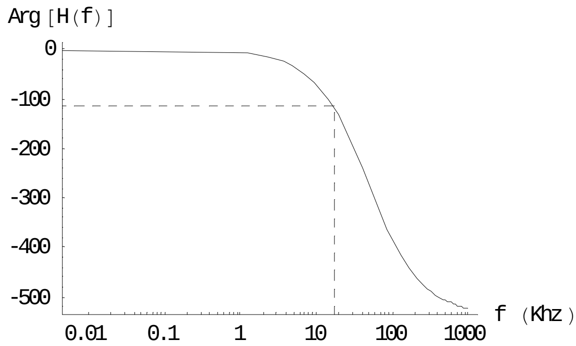


Figura 4. Espectro de fase (escala logarítmica)

Apartado c)
El retardo (en tiempo) que el sistema introduce a un armónico determinado es fácil calcularlo en función del desfase (en ángulo) que se produce, sin más que tener en cuenta que el período *T* equivale a un ángulo de *2π*, por lo que el retardo se calcula como

$$R(\omega) = \arg\left[H(\omega)\right]\frac{T}{2\pi} = \arg\left[H(\omega)\right]\frac{1}{\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)} = \frac{\arg\left[H(\omega)\right]}{\omega}$$

Recordando que

$$\arg\left[H(\omega)\right] = -6\cdot arctg\left(\omega RC\right)$$

tenemos que

$$R(\omega) = \frac{-6\cdot arctg\left(\omega RC\right)}{\omega}$$

En términos de frecuencia podemos escribir

$$R(f) = \frac{-6\cdot arctg\left(2\pi f RC\right)}{2\pi f}$$

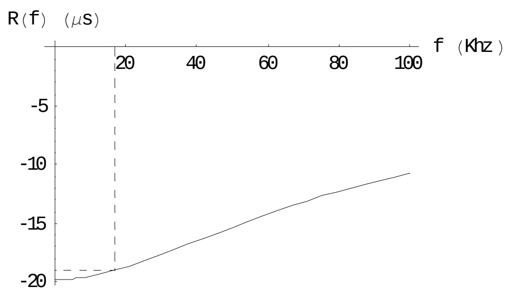


Figura 5. Retardo (escala lineal)

La figura 5 representa el retardo del sistema en escala lineal. Análogamente, la figura 6 lo representa en escala logarítmica.

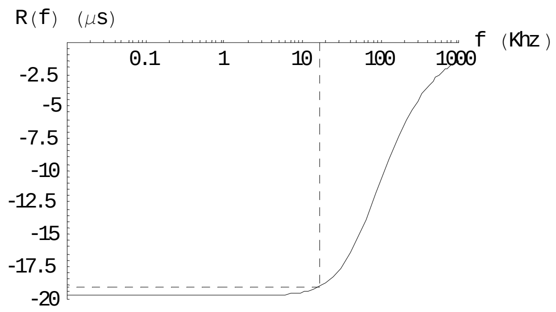


Figura 6. Retardo (escala logarítmica)

Por otra parte, el retardo de grupo se define como

$$R_g(\omega) \equiv \frac{d \arg\left[H(\omega)\right]}{d\omega}$$

Por tanto

$$R_g(\omega) = \frac{d\left[-6 \cdot arctg\left(\omega RC\right)\right]}{d\omega} = \frac{-6RC}{1+\left(\omega RC\right)^2}$$

En términos de frecuencia podemos escribir

$$R_g(f) = \frac{-6RC}{1+\left(2\pi f RC\right)^2}$$

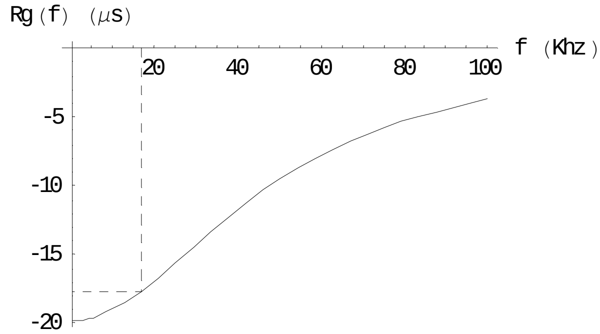


Figura 7. Retardo de grupo (escala lineal)

La figura 7 representa el retardo de grupo del sistema en escala lineal. Análogamente, la figura 8 lo representa en escala logarítmica.

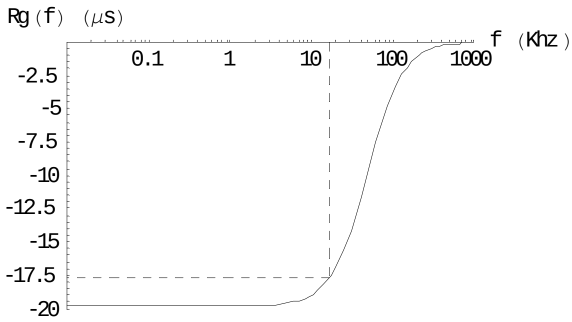


Figura 8. Retardo de grupo (escala logarítmica)

Apartado d)

El ancho de banda de 3 dB, o la frecuencia de 3 dB (f_{3dB}), se define como aquella en la que la potencia de la señal se divide por 2, o lo que es lo mismo, aquella que cumple

$$\left|H(f_{3dB})\right|_{dB} = -3dB$$

$$20\log\left|H(f_{3dB})\right| = -3$$

$$\left|H(f_{3dB})\right| = 10^{-\frac{3}{20}} = \left(10^{-\frac{3}{10}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\left[1+\left(2\pi f_{3dB}RC\right)^2\right]^3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left[1+\left(2\pi f_{3dB}RC\right)^2\right]^3 = \sqrt{2}$$

Extrayendo raíz cúbica

$$1+\left(2\pi f_{3dB}RC\right)^2 = \sqrt[6]{2}$$

$$\left(2\pi f_{3dB}RC\right)^2 = \sqrt[6]{2}-1$$

$$2\pi f_{3dB}RC = \sqrt{\sqrt[6]{2}-1}$$

$$f_{3dB} = \frac{\sqrt{\sqrt[6]{2}-1}}{2\pi RC}$$

En nuestro caso tenemos, sustituyendo

$$f_{3dB} = \frac{\sqrt{\sqrt[6]{2}-1}}{2\pi\cdot 10^3\cdot 3'3\cdot 10^{-9}} = 16'88\,Khz$$

Apartado e)

Calcularemos ahora los parámetros del sistema a la frecuencia de 3dB (f_{3dB}). En primer lugar, la ganancia del sistema es

$$|H(f_{3dB})| = \frac{1}{\left[1+\left(2\pi f_{3dB} RC\right)^2\right]^3}$$

$$|H(f_{3dB})| = \frac{1}{\left[1+\left(2\pi \frac{\sqrt{\sqrt[6]{2}-1}}{2\pi RC} RC\right)^2\right]^3} = \frac{1}{\left[1+\left(\sqrt{\sqrt[6]{2}-1}\right)^2\right]^3} = \frac{1}{\left[1+\sqrt[6]{2}-1\right]^3} = \frac{1}{\left[\sqrt[6]{2}\right]^3}$$

$$|H(f_{3dB})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

El desfase es

$$\arg\left[H(f_{3dB})\right] = -6\cdot arctg\left(2\pi f_{3dB} RC\right)$$

$$\arg\left[H(f_{3dB})\right] = -6\cdot arctg\left(2\pi \frac{\sqrt{\sqrt[6]{2}-1}}{2\pi RC} RC\right) = -6\cdot arctg\left(\sqrt{\sqrt[6]{2}-1}\right)$$

$$\arg\left[H(f_{3dB})\right] = -115'72^{\circ}$$

El retardo del sistema se calcula como

$$R(f_{3dB}) = \frac{\arg\left[H(f_{3dB})\right]}{2\pi f_{3dB}} = \frac{-6\cdot arctg\left(\sqrt{\sqrt[6]{2}-1}\right)}{2\pi \frac{\sqrt{\sqrt[6]{2}-1}}{2\pi RC}}$$

$$R(f_{3dB}) = -6RC\cdot \frac{arctg\left(\sqrt{\sqrt[6]{2}-1}\right)}{\sqrt{\sqrt[6]{2}-1}}$$

En nuestro caso

$$R(f_{3dB}) = -6\left(1\cdot 10^{-3}\right)\left(3'3\cdot 10^{-9}\right)\cdot \frac{arctg\left(\sqrt{\sqrt[6]{2}-1}\right)}{\sqrt{\sqrt[6]{2}-1}}$$

$$R(f_{3dB}) = -19'05\mu s$$

El retardo de grupo del sistema a la frecuencia de 3dB se calcula como

$$R_g(f_{3dB}) = \frac{-6RC}{1+\left(2\pi f_{3dB} RC\right)^2}$$

$$R_g(f_{3dB}) = \frac{-6RC}{1+\left(2\pi\frac{\sqrt{\sqrt[6]{2}-1}}{2\pi RC}RC\right)^2} = \frac{-6RC}{1+\left(\sqrt{\sqrt[6]{2}-1}\right)^2} = \frac{-6RC}{1+\sqrt[6]{2}-1}$$

$$R_g(f_{3dB}) = \frac{-6RC}{\sqrt[6]{2}}$$

En nuestro caso

$$R_g(f_{3dB}) = \frac{-6\left(1\cdot 10^{-3}\right)\left(3'3\cdot 10^{-9}\right)}{\sqrt[6]{2}}$$

$$R_g(f_{3dB}) = 17'64\mu s$$

Apartado f)

Sabemos que el espectro de amplitud de un tren de pulsos Sample es aproximadamente plano (ver problema PTC0004-10) y que cada armónico vale

$$M_n \approx \frac{AT_s}{T} = \frac{10\cdot\frac{1}{40Khz}}{\frac{1}{1Khz}} = 250mV$$

o, en valores RMS,

$$M_{nRMS} = \frac{M_n}{\sqrt{2}} \approx \frac{250mV}{\sqrt{2}} = 177mV$$

Por otra parte, si denominamos *H(ω)* a la función de transferencia del sistema, *F(ω)* a la representación espectral de la entrada y *G(ω)* a la representación espectral de la salida, tenemos que

$$H(\omega) = \frac{G(\omega)}{F(\omega)}$$

Pero si la entrada es aproximadamente constante, entonces

$$H(\omega) \approx k\cdot G(\omega)$$

es decir, que el espectro de la salida tiene aproximadamente la misma forma que la función de transferencia, difiriendo en una constante, que para representaciones RMS, toma el valor

$$k = \frac{1}{M_{nRMS}} = \frac{1}{177mV}$$