Problema PTC0004-18

Dibujar el espectro de amplitud de un cable con pérdidas en circuito abierto, determinando los valores y frecuencias de los valores máximos y mínimos.

Solución PTC0004-18

Sabemos que la función de transferencia de un cable con pérdidas es (ver TTC-004)

$$H(\omega) = \frac{1+\rho}{e^{\gamma z_e} + \rho e^{-\gamma z_e}}$$

siendo

$$\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

$$\gamma = \sqrt{Z \cdot Y}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$$

$$Z = R + j\omega L; \quad Y = G + j\omega C$$

Cuando el cable se deja en circuito abierto entonces

$$\rho = \lim_{Z_L \to \infty} \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 1$$

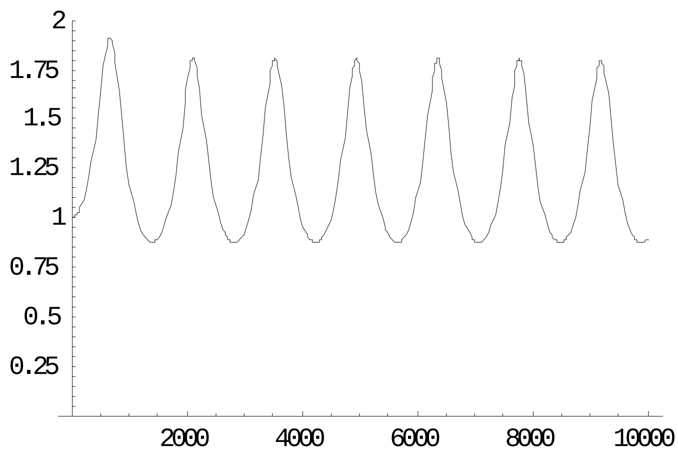
y la función de transferencia es

$$H(\omega) = \frac{2}{e^{\gamma z_e} + e^{-\gamma z_e}}$$

siendo el espectro de amplitud

$$|H(\omega)| = \frac{2}{\left|e^{\gamma z_e} + e^{-\gamma z_e}\right|}$$

que gráficamente se refleja mediante la figura inferior. En ella puede observarse cómo el espectro de amplitud va teniendo máximos y mínimos relativos al variar la frecuencia. A medida que la frecuencia crece esos valores tienden a hacerse constantes, y el objetivo del problema es determinar dichos valores y las frecuencias a las que se producen, es decir, los valores (y sus frecuencias) cuando la frecuencia es grande.



Comencemos por calcular el valor de γ que sabemos que vale

$$\gamma = \sqrt{Z \cdot Y} = \sqrt{(R + j\omega L)\cdot(G + j\omega C)}$$

$$\gamma = \sqrt{RG + j\omega RC + j\omega GL - \omega^2 LC}$$

$$\gamma = \sqrt{\left(RG - \omega^2 LC\right) + j\left(\omega RC + \omega GL\right)}$$

El módulo será

$$|\gamma| = \left|\sqrt{\left(RG - \omega^2 LC\right) + j\left(\omega RC + \omega GL\right)}\right|$$

$$|\gamma| = \sqrt{\left|\left(RG - \omega^2 LC\right) + j\left(\omega RC + \omega GL\right)\right|}$$

$$|\gamma| = \sqrt{\sqrt{\left(RG - \omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega RC + \omega GL\right)^2}}$$

$$|\gamma| = \sqrt[4]{\left(RG - \omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega RC + \omega GL\right)^2}$$

y su argumento

$$\arg[\gamma] = \arg\left[\sqrt{\left(RG - \omega^2 LC\right) + j\left(\omega RC + \omega GL\right)}\right]$$

$$\arg[\gamma] = \frac{1}{2}\arg\left[\left(RG - \omega^2 LC\right) + j\left(\omega RC + \omega GL\right)\right]$$

$$\arg[\gamma] = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{RG - \omega^2 LC}\right)$$

Tratemos ahora de calcular la parte real e imaginaria de γ. Para un número complejo cualquiera

$$z = x + jy = k_{\underline{|\varphi}}$$

se verifica que

$$\operatorname{Re}[z] = x = k\cos\varphi = |z|\cos(\arg[z])$$
$$\operatorname{Im}[z] = y = k\operatorname{sen}\varphi = |z|\operatorname{sen}(\arg[z])$$

por lo tanto

$$\operatorname{Re}[\gamma] = |\gamma|\cos(\arg[\gamma])$$
$$\operatorname{Im}[\gamma] = |\gamma|\operatorname{sen}(\arg[\gamma])$$

y sustituyendo tenemos

$$\operatorname{Re}[\gamma] = \sqrt[4]{\left(RG - \omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega RC + \omega GL\right)^2}\cos\left[\frac{1}{2}arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{RG - \omega^2 LC}\right)\right]$$
$$\operatorname{Im}[\gamma] = \sqrt[4]{\left(RG - \omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega RC + \omega GL\right)^2}\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{RG - \omega^2 LC}\right)\right]$$

Llamemos

$$a = \cos\left[\frac{1}{2}arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{RG - \omega^2 LC}\right)\right]$$

Sabemos que

$$tg(\pi+\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)} = \frac{\operatorname{sen}\pi\cdot\cos\alpha + \cos\pi\cdot\operatorname{sen}\alpha}{\cos\pi\cdot\cos\alpha - \operatorname{sen}\pi\cdot\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\operatorname{tg}(\pi+\alpha) = \frac{0\cdot\cos\alpha + (-1)\cdot\operatorname{sen}\alpha}{(-1)\cdot\cos\alpha - 0\cdot\operatorname{sen}\alpha} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$

Llamando

$$u = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\pi+\alpha)$$

podemos escribir que

$$\alpha = \operatorname{arctg}(u); \quad \pi+\alpha = \operatorname{arctg}(u)$$

de donde obtenemos que

$$\operatorname{arctg}(u) = \pi+\alpha = \pi + \operatorname{arctg}(u)$$

De igual modo, si

$$u = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -u$$

$$\operatorname{arctg}(-u) = -\alpha = -\operatorname{arctg}(u)$$

$$\operatorname{arctg}(u) = -\operatorname{arctg}(-u)$$

por lo que sustituyendo tenemos

$$\operatorname{arctg}(u) = \pi + \operatorname{arctg}(u) = \pi - \operatorname{arctg}(-u)$$

En definitiva la expresión anterior nos indica que la función arco tangente puede tener dos soluciones en diferentes cuadrantes. La elección de una u otro dependerá de las condiciones del problema.

Recordando que habíamos llamado

$$a = \cos\left[\frac{1}{2}arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{RG - \omega^2 LC}\right)\right]$$

expresión en la cual el término arco tangente proviene del argumento de un número complejo

$$arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{RG - \omega^2 LC}\right) = \arg\left[\left(RG - \omega^2 LC\right) + j\left(\omega RC + \omega GL\right)\right]$$

En esta expresión, vemos que el número complejo tiene parte imaginaria siempre positiva, mientras que la parte real será negativa para frecuencias grandes que cumplan

$$RG - \omega^2 LC < 0$$

$$\omega^2 > \frac{RG}{LC}$$

$$f > \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{RG}{LC}}$$

Es decir, que para frecuencias grandes el argumento del número complejo deberá estar en el tercer cuadrante y ser de la forma π-α. Por tanto

$$arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{RG - \omega^2 LC}\right) = \pi - arctg\left(-\frac{\omega RC + \omega GL}{RG - \omega^2 LC}\right)$$

$$arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{RG - \omega^2 LC}\right) = \pi - arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{\omega^2 LC - RG}\right)$$

Sustituyendo tenemos que, para frecuencias grandes

$$a = \cos\left[\frac{1}{2}arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{RG - \omega^2 LC}\right)\right] = \cos\left[\frac{1}{2}\left\{\pi - arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{\omega^2 LC - RG}\right)\right\}\right]$$

$$a=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}arctg\left(\frac{\omega RC+\omega GL}{\omega^2 LC-RG}\right)\right]$$

$$a=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left[\frac{1}{2}arctg\left(\frac{\omega RC+\omega GL}{\omega^2 LC-RG}\right)\right]+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}arctg\left(\frac{\omega RC+\omega GL}{\omega^2 LC-RG}\right)\right]$$

$$a=0\cdot\cos\left[\frac{1}{2}arctg\left(\frac{\omega RC+\omega GL}{\omega^2 LC-RG}\right)\right]+1\cdot\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}arctg\left(\frac{\omega RC+\omega GL}{\omega^2 LC-RG}\right)\right]$$

$$a=\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}arctg\left(\frac{\omega RC+\omega GL}{\omega^2 LC-RG}\right)\right]$$

También sabemos que para ángulos pequeños

$$\operatorname{tg}\alpha\approx\operatorname{sen}\alpha\approx\alpha$$

Para frecuencias grandes vemos que

$$\frac{\omega RC+\omega GL}{\omega^2 LC-RG}$$

es un valor pequeño por lo que

$$a=\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}arctg\left(\frac{\omega RC+\omega GL}{\omega^2 LC-RG}\right)\right]\approx\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\frac{\omega RC+\omega GL}{\omega^2 LC-RG}\right)\approx\frac{1}{2}\frac{\omega RC+\omega GL}{\omega^2 LC-RG}$$

Con este resultado podemos volver al cálculo de la parte real de γ que recordamos que vale

$$\operatorname{Re}[\gamma]=\sqrt[4]{\left(RG-\omega^2 LC\right)^2+\left(\omega RC+\omega GL\right)^2}\cos\left[\frac{1}{2}arctg\left(\frac{\omega RC+\omega GL}{RG-\omega^2 LC}\right)\right]$$

Para frecuencias grandes podemos escribir la expresión aproximada

$$\operatorname{Re}[\gamma]\approx\sqrt[4]{\left(RG-\omega^2 LC\right)^2+\left(\omega RC+\omega GL\right)^2}\frac{\omega RC+\omega GL}{2\left(\omega^2 LC-RG\right)}$$

Como a frecuencias grandes

$$\omega^2 LC\gg RG$$

podemos aproximar

$$RG-\omega^2 LC\approx-\omega^2 LC$$

y sustituyendo

$$\operatorname{Re}[\gamma]\approx\sqrt[4]{\omega^4 L^2 C^2+\omega^2\left(RC+GL\right)^2}\frac{\omega RC+\omega GL}{2\omega^2 LC}$$

$$\operatorname{Re}[\gamma]\approx\sqrt[4]{\omega^4 L^2 C^2+\omega^2\left(RC+GL\right)^2}\frac{RC+GL}{2\omega LC}$$

Como a frecuencias grandes

$$\omega^4 L^2 C^2 \gg \omega^2 \left(RC + GL\right)^2$$

podemos aproximar

$$\omega^4 L^2 C^2 + \omega^2 \left(RC + GL\right)^2 \approx \omega^4 L^2 C^2$$

y sustituyendo

$$\mathrm{Re}\left[\gamma\right] \approx \sqrt[4]{\omega^4 L^2 C^2}\,\frac{RC + GL}{2\omega LC} = \omega\sqrt{LC}\,\frac{RC + GL}{2\omega LC}$$

y finalmente

$$\mathrm{Re}\left[\gamma\right] \approx \frac{RC + GL}{2\sqrt{LC}}$$

Calculemos ahora la parte imaginaria de γ que recordamos que vale

$$\mathrm{Im}\left[\gamma\right] = \sqrt[4]{\left(RG - \omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega RC + \omega GL\right)^2}\ \mathrm{sen}\left[\frac{1}{2} arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{RG - \omega^2 LC}\right)\right]$$

Llamemos

$$b = \mathrm{sen}\left[\frac{1}{2} arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{RG - \omega^2 LC}\right)\right]$$

Sustituyendo tenemos que, para frecuencias grandes

$$b = \mathrm{sen}\left[\frac{1}{2} arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{RG - \omega^2 LC}\right)\right] = \mathrm{sen}\left[\frac{1}{2}\left\{\pi - arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{\omega^2 LC - RG}\right)\right\}\right]$$

$$b = \mathrm{sen}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{\omega^2 LC - RG}\right)\right]$$

$$b = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left[\frac{1}{2} arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{\omega^2 LC - RG}\right)\right] - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{sen}\left[\frac{1}{2} arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{\omega^2 LC - RG}\right)\right]$$

$$b = 1\cdot\cos\left[\frac{1}{2} arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{\omega^2 LC - RG}\right)\right] + 0\cdot\mathrm{sen}\left[\frac{1}{2} arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{\omega^2 LC - RG}\right)\right]$$

$$b = \cos\left[\frac{1}{2} arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{\omega^2 LC - RG}\right)\right]$$

También sabemos que para ángulos pequeños

$$\mathrm{tg}\,\alpha \approx \alpha; \quad \cos\alpha \approx 1$$

Para frecuencias grandes vemos que

$$\frac{\omega RC + \omega GL}{\omega^2 LC - RG}$$

es un valor pequeño por lo que

$$b = \cos\left[\frac{1}{2} arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{\omega^2 LC - RG}\right)\right] \approx \cos\left(\frac{1}{2}\frac{\omega RC + \omega GL}{\omega^2 LC - RG}\right) \approx 1$$

Con este resultado podemos volver al cálculo de la parte real de γ que recordamos que vale

$$\mathrm{Im}[\gamma] = \sqrt[4]{\left(RG - \omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega RC + \omega GL\right)^2}\ \mathrm{sen}\left[\frac{1}{2} arctg\left(\frac{\omega RC + \omega GL}{RG - \omega^2 LC}\right)\right]$$

Para frecuencias grandes podemos escribir la expresión aproximada

$$\mathrm{Im}[\gamma] \approx \sqrt[4]{\left(RG - \omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega RC + \omega GL\right)^2}$$

Como a frecuencias grandes

$$\omega^2 LC \gg RG$$

podemos aproximar

$$RG - \omega^2 LC \approx -\omega^2 LC$$

y sustituyendo

$$\mathrm{Im}[\gamma] \approx \sqrt[4]{\omega^4 L^2 C^2 + \omega^2 \left(RC + GL\right)^2}$$

Como a frecuencias grandes

$$\omega^4 L^2 C^2 \gg \omega^2 \left(RC + GL\right)^2$$

podemos aproximar

$$\omega^4 L^2 C^2 + \omega^2 \left(RC + GL\right)^2 \approx \omega^4 L^2 C^2$$

y sustituyendo

$$\mathrm{Im}[\gamma] \approx \sqrt[4]{\omega^4 L^2 C^2}$$

y finalmente

$$\mathrm{Im}[\gamma] \approx \omega\sqrt{LC}$$

Con estos resultados podemos volver a retomar el valor de la función de transferencia del cable cuando se deja en circuito abierto que vimos que vale

$$H(\omega) = \frac{2}{e^{\gamma z_e} + e^{-\gamma z_e}} = \frac{2}{e^{\mathrm{Re}[\gamma z_e]} e^{j\,\mathrm{Im}[\gamma z_e]} + e^{\mathrm{Re}[-\gamma z_e]} e^{j\,\mathrm{Im}[-\gamma z_e]}}$$

$$H(\omega) = \frac{2}{e^{\mathrm{Re}[\gamma z_e]} e^{j\,\mathrm{Im}[\gamma z_e]} + e^{-\mathrm{Re}[\gamma z_e]} e^{-j\,\mathrm{Im}[\gamma z_e]}}$$

$$H(\omega) = \frac{2}{e^{\mathrm{Re}[\gamma z_e]}\left\{\cos\left(\mathrm{Im}[\gamma z_e]\right) + j\,\mathrm{sen}\left(\mathrm{Im}[\gamma z_e]\right)\right\} + e^{-\mathrm{Re}[\gamma z_e]}\left\{\cos\left(\mathrm{Im}[\gamma z_e]\right) - j\,\mathrm{sen}\left(\mathrm{Im}[\gamma z_e]\right)\right\}}$$

$$H(\omega)=\frac{2}{\left(e^{\mathrm{Re}[\gamma z_e]}+e^{-\mathrm{Re}[\gamma z_e]}\right)\cos\left(\mathrm{Im}[\gamma z_e]\right)+j\left(e^{\mathrm{Re}[\gamma z_e]}-e^{-\mathrm{Re}[\gamma z_e]}\right)\mathrm{sen}\left(\mathrm{Im}[\gamma z_e]\right)}$$

Para frecuencias grandes

$$\mathrm{Re}[\gamma z_e]=\mathrm{Re}[\gamma]z_e\approx\frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}}z_e$$
$$\mathrm{Im}[\gamma z_e]=\mathrm{Im}[\gamma]z_e\approx\omega\sqrt{LC}z_e$$

y sustituyendo

$$H(\omega)\approx\frac{2}{\left(e^{\frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}}z_e}+e^{-\frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}}z_e}\right)\cos\left(z_e\sqrt{LC}\omega\right)+j\left(e^{\frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}}z_e}-e^{-\frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}}z_e}\right)\mathrm{sen}\left(z_e\sqrt{LC}\omega\right)}$$

Llamando

$$A=e^{\frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}}z_e}+e^{-\frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}}z_e}$$
$$B=e^{\frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}}z_e}-e^{-\frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}}z_e}$$

tenemos para el espectro

$$H(\omega)\approx\frac{2}{A\cos\left(z_e\sqrt{LC}\omega\right)+jB\,\mathrm{sen}\left(z_e\sqrt{LC}\omega\right)}$$

y su amplitud

$$|H(\omega)|\approx\frac{2}{\sqrt{A^2\cos^2\left(z_e\sqrt{LC}\omega\right)+B^2\,\mathrm{sen}^2\left(z_e\sqrt{LC}\omega\right)}}$$

o, lo que es lo mismo,

$$|H(\omega)|\approx 2\left[A^2\cos^2\left(z_e\sqrt{LC}\omega\right)+B^2\,\mathrm{sen}^2\left(z_e\sqrt{LC}\omega\right)\right]^{-1/2}$$

Los máximos y mínimos del espectro de amplitud son aquellos en los que la derivada se anula, es decir,

$$\left.\frac{d|H(\omega)|}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_m}=0$$

Derivando tenemos

$$\left.\frac{d|H(\omega)|}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_m}\approx 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left[A^2\cos^2\left(z_e\sqrt{LC}\omega_m\right)+B^2\,\mathrm{sen}^2\left(z_e\sqrt{LC}\omega_m\right)\right]^{-3/2}\cdot$$
$$\cdot\left[-2A^2z_e\sqrt{LC}\cos\left(z_e\sqrt{LC}\omega_m\right)\mathrm{sen}\left(z_e\sqrt{LC}\omega_m\right)+2B^2z_e\sqrt{LC}\,\mathrm{sen}\left(z_e\sqrt{LC}\omega_m\right)\cos\left(z_e\sqrt{LC}\omega_m\right)\right]=0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones. La primera de ellas es

$$\left[A^2\cos^2\left(z_e\sqrt{LC}\omega_m\right)+B^2\,\mathrm{sen}^2\left(z_e\sqrt{LC}\omega_m\right)\right]^{-3/2}=0$$

$$\frac{1}{\left[A^2\cos^2\left(z_e\sqrt{LC}\omega_m\right)+B^2\operatorname{sen}^2\left(z_e\sqrt{LC}\omega_m\right)\right]^{3/2}}=0$$

$$A^2\cos^2\left(z_e\sqrt{LC}\omega_m\right)+B^2\operatorname{sen}^2\left(z_e\sqrt{LC}\omega_m\right)=\infty$$

lo cual es imposible ya que las funciones trigonométricas están comprendidas entre *-1* y *1*, y las constantes A y B son finitas. La otra posible solución es

$$-2A^2z_e\sqrt{LC}\cos\left(z_e\sqrt{LC}\omega_m\right)\operatorname{sen}\left(z_e\sqrt{LC}\omega_m\right)+2B^2z_e\sqrt{LC}\operatorname{sen}\left(z_e\sqrt{LC}\omega_m\right)\cos\left(z_e\sqrt{LC}\omega_m\right)=0$$

$$z_e\sqrt{LC}\left[-A^2\operatorname{sen}\left(2z_e\sqrt{LC}\omega_m\right)+B^2\operatorname{sen}\left(2z_e\sqrt{LC}\omega_m\right)\right]=0$$

$$\left(B^2-A^2\right)\operatorname{sen}\left(2z_e\sqrt{LC}\omega_m\right)=0$$

$$\operatorname{sen}\left(2z_e\sqrt{LC}\omega_m\right)=0$$

$$2z_e\sqrt{LC}\omega_m=n\pi \quad \forall n=0,1,2,...$$

$$\omega_m=\frac{n\pi}{2z_e\sqrt{LC}} \quad \forall n=0,1,2,...$$

En términos de frecuencia

$$2\pi f_m=\frac{n\pi}{2z_e\sqrt{LC}} \quad \forall n=0,1,2,...$$

$$f_m=\frac{n}{4z_e\sqrt{LC}} \quad \forall n=0,1,2,...$$

Los valores máximo y mínimo del espectro de amplitud se producen a las frecuencias anteriormente calculadas y valen

$$\left|H(\omega_m)\right|\approx\frac{2}{\sqrt{A^2\cos^2\left(z_e\sqrt{LC}\omega_m\right)+B^2\operatorname{sen}^2\left(z_e\sqrt{LC}\omega_m\right)}}$$

Sustituyendo los valores calculados para las frecuencias tenemos

$$\left|H(\omega_m)\right|\approx\frac{2}{\sqrt{A^2\cos^2\left(z_e\sqrt{LC}\,\frac{n\pi}{2z_e\sqrt{LC}}\right)+B^2\operatorname{sen}^2\left(z_e\sqrt{LC}\,\frac{n\pi}{2z_e\sqrt{LC}}\right)}} \quad \forall n=0,1,2,...$$

$$\left|H(\omega_m)\right|\approx\frac{2}{\sqrt{A^2\cos^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)+B^2\operatorname{sen}^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)}} \quad \forall n=0,1,2,...$$

$$\begin{cases} |H(\omega_m)| \approx \dfrac{2}{\sqrt{A^2 \cdot 1 + B^2 \cdot 0}} & \forall n = 0, 2, 4, ... \\ |H(\omega_m)| \approx \dfrac{2}{\sqrt{A^2 \cdot 0 + B^2 \cdot 1}} & \forall n = 1, 3, 5, ... \end{cases}$$

$$\begin{cases} |H(\omega_m)| \approx \dfrac{2}{A} & \forall n = 0, 2, 4, ... \\ |H(\omega_m)| \approx \dfrac{2}{B} & \forall n = 1, 3, 5, ... \end{cases}$$

Recordando los valores de A y B tenemos

$$\begin{cases} |H(\omega_m)| \approx \dfrac{2}{e^{\frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}} z_e} + e^{-\frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}} z_e}} & \forall n = 0, 2, 4, ... \\ |H(\omega_m)| \approx \dfrac{2}{e^{\frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}} z_e} - e^{-\frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}} z_e}} & \forall n = 1, 3, 5, ... \end{cases}$$

Si trazamos esos valores como líneas discontinuas tenemos el siguiente gráfico