Problema PTC0004-19

Dibujar el espectro de amplitud de un cable con pérdidas cargado con una impedancia igual a la impedancia característica, determinando los valores y frecuencias de los valores máximos y mínimos.

Solución PTC0004-19

Sabemos que la función de transferencia de un cable con pérdidas es (ver TTC-004)

$$H(\omega) = \frac{1+\rho}{e^{\gamma z_e} + \rho e^{-\gamma z_e}}$$

siendo

$$\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

$$\gamma = \sqrt{Z \cdot Y}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$$

$$Z = R + j\omega L; \quad Y = G + j\omega C$$

Cuando el cable se carga con una impedancia igual a la impedancia característica entonces

$$\rho = \frac{Z_0 - Z_0}{Z_0 + Z_0} = 0$$

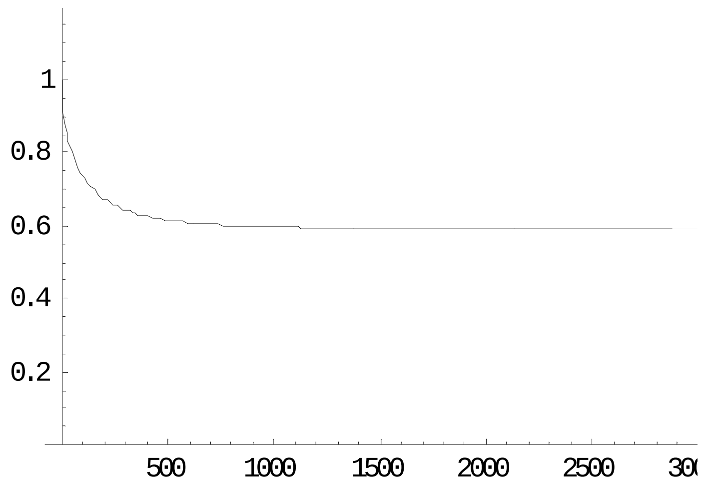
y la función de transferencia es

$$H(\omega) = \frac{1}{e^{\gamma z_e}}$$

siendo el espectro de amplitud

$$|H(\omega)| = \frac{1}{|e^{\gamma z_e}|}$$

que gráficamente se refleja mediante la figura inferior. En ella puede observarse a medida que la frecuencia crece el espectro alcanza un valor constante. El objetivo del problema es determinar dicho valor cuando la frecuencia es grande.



Sabemos también (ver problema PTC0004-18) que para frecuencias grandes

$$\mathrm{Re}[\gamma] \approx \frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}}$$

$$\mathrm{Im}[\gamma] \approx \omega\sqrt{LC}$$

Sustituyendo estos resultados en el valor de la función de transferencia del cable tenemos

$$H(\omega) = \frac{1}{e^{\gamma z_e}} = \frac{1}{e^{\mathrm{Re}[\gamma z_e]} e^{j\,\mathrm{Im}[\gamma z_e]}}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{e^{\mathrm{Re}[\gamma z_e]} e^{j\,\mathrm{Im}[\gamma z_e]}}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{e^{\mathrm{Re}[\gamma z_e]}\left\{\cos\left(\mathrm{Im}[\gamma z_e]\right) + j\,\mathrm{sen}\left(\mathrm{Im}[\gamma z_e]\right)\right\}}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{e^{\mathrm{Re}[\gamma z_e]}\cos\left(\mathrm{Im}[\gamma z_e]\right) + je^{\mathrm{Re}[\gamma z_e]}\,\mathrm{sen}\left(\mathrm{Im}[\gamma z_e]\right)}$$

Para frecuencias grandes

$$\mathrm{Re}[\gamma z_e] = \mathrm{Re}[\gamma] z_e \approx \frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}} z_e$$
$$\mathrm{Im}[\gamma z_e] = \mathrm{Im}[\gamma] z_e \approx \omega\sqrt{LC} z_e$$

y sustituyendo

$$H(\omega) \approx \frac{1}{e^{\frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}} z_e}\cos\left(z_e\sqrt{LC}\omega\right) + je^{\frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}} z_e}\,\mathrm{sen}\left(z_e\sqrt{LC}\omega\right)}$$

Llamando

$$A = e^{\frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}} z_e}$$

tenemos para el espectro

$$H(\omega) \approx \frac{1}{A\cos\left(z_e\sqrt{LC}\omega\right) + jA\,\mathrm{sen}\left(z_e\sqrt{LC}\omega\right)}$$

y su amplitud

$$\left|H(\omega)\right| \approx \frac{1}{A\sqrt{\cos^2\left(z_e\sqrt{LC}\omega\right) + \mathrm{sen}^2\left(z_e\sqrt{LC}\omega\right)}}$$

$$\left|H(\omega)\right| \approx \frac{1}{A}$$

sustituyendo el valor de A tenemos

$$\left|H(\omega)\right| \approx \frac{1}{e^{\frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}} z_e}}$$

Si trazamos este valor como línea discontinua tenemos el siguiente gráfico