Problema PTC0004-20

Un cable de pares es excitado en un extremo con una tensión senoidal de 5 V de amplitud y 100 Khz de frecuencia. Cuando el otro extremo está sin carga (en circuito abierto), la intensidad a la entrada es de 15 mA de amplitud con un retraso de -2300 ns (adelanto). Por el contrario, cuando el otro extremo se encuentra en cortocircuito, la intensidad a la entrada es de 210 mA de amplitud con un retraso de 1800 ns. Calcular los parámetros eléctricos del cable (R, L, G y C).

Solución PTC0004-20

Conocida la frecuencia (*f*) de la tensión e intensidad de entrada, el retraso temporal (*d*) puede expresarse en términos angulares (φ) en grados mediante la expresión

$$\varphi = -360\frac{d}{T} = -360df$$

Las fases de la intensidad en el caso de circuito abierto y de cortocircuito son, respectivamente

$$\varphi_{ca} = -360 d_{ca} f = -360\left(-2300\cdot 10^{-9}\right)\left(100\cdot 10^{3}\right) = 82'8^{\circ}$$

$$\varphi_{cc} = -360 d_{cc} f = -360\left(1800\cdot 10^{-9}\right)\left(100\cdot 10^{3}\right) = -64'8^{\circ}$$

Por tanto, los fasores correspondientes a la tensión y a la intensidad a la entrada del cable en el caso de circuito abierto y de cortocircuito son, respectivamente

$$V_i = 5_{\underline{|0}} V;\quad I_{ica} = 15_{\underline{|82'8^{\circ}}} mA;\quad I_{icc} = 210_{\underline{|-64'8^{\circ}}} mA$$

Con estos datos podemos calcular las impedancias de entrada en los dos casos estudiados que son, respectivamente

$$Z_{ica} = \frac{V_i}{I_{ica}} = \frac{5_{\underline{|0}} V}{15_{\underline{|82'8^{\circ}}} mA} = 333_{\underline{|-82'8^{\circ}}}\Omega$$

$$Z_{icc} = \frac{V_i}{I_{icc}} = \frac{5_{\underline{|0}} V}{210_{\underline{|-64'8^{\circ}}} mA} = 23'8_{\underline{|64'8^{\circ}}}\Omega$$

Por otra parte sabemos que la impedancia de entrada de un cable se expresa mediante

$$Z_i = \frac{1+\rho e^{-2\gamma z_e}}{1-\rho e^{-2\gamma z_e}} Z_0$$

en la que

$$\gamma = \sqrt{Z\cdot Y} = \sqrt{(R+j\omega L)\cdot(G+j\omega C)}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$$

y

$$\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

siendo *R*, *L*, *G* y *C* los parámetros a calcular del cable (respectivamente resistencia, inductancia, conductancia y capacidad por unidad de longitud), Z_L la impedancia de carga del cable y z_e la longitud total del cable.

Para el caso del circuito abierto $Z_L=\infty$ por lo que $\rho=1$ y la impedancia de entrada vale

$$Z_{ica} = \frac{1+e^{-2\gamma z_e}}{1-e^{-2\gamma z_e}} Z_0$$

Para el caso del cortocircuito $Z_L=0$ por lo que $\rho=-1$ y la impedancia de entrada vale

$$Z_{icc} = \frac{1-e^{-2\gamma z_e}}{1+e^{-2\gamma z_e}} Z_0$$

Si multiplicamos ambas expresiones tenemos

$$Z_{ica} Z_{icc} = \frac{1+e^{-2\gamma z_e}}{1-e^{-2\gamma z_e}} Z_0 \frac{1-e^{-2\gamma z_e}}{1+e^{-2\gamma z_e}} Z_0 = \left(Z_0\right)^2$$

de donde

$$Z_0 = \sqrt{Z_{ica} Z_{icc}}$$

En nuestro caso

$$Z_0 = \sqrt{333_{\underline{|-82'8^{\circ}}} 23'8_{\underline{|64'8^{\circ}}}} = 89'09_{\underline{|-9^{\circ}}} \Omega$$

Si dividimos las expresiones de las impedancias de entrada tenemos

$$\frac{Z_{ica}}{Z_{icc}} = \frac{\dfrac{1+e^{-2\gamma z_e}}{1-e^{-2\gamma z_e}} Z_0}{\dfrac{1-e^{-2\gamma z_e}}{1+e^{-2\gamma z_e}} Z_0} = \left(\frac{1+e^{-2\gamma z_e}}{1-e^{-2\gamma z_e}}\right)^2$$

$$\frac{1+e^{-2\gamma z_e}}{1-e^{-2\gamma z_e}} = \sqrt{\frac{Z_{ica}}{Z_{icc}}}$$

$$1+e^{-2\gamma z_e} = \sqrt{\frac{Z_{ica}}{Z_{icc}}}\left(1-e^{-2\gamma z_e}\right) = \sqrt{\frac{Z_{ica}}{Z_{icc}}} - e^{-2\gamma z_e}\sqrt{\frac{Z_{ica}}{Z_{icc}}}$$

$$e^{-2\gamma z_e}\sqrt{\frac{Z_{ica}}{Z_{icc}}} + e^{-2\gamma z_e} = \sqrt{\frac{Z_{ica}}{Z_{icc}}} - 1$$

$$e^{-2\gamma z_e}\left(\sqrt{\frac{Z_{ica}}{Z_{icc}}} + 1\right) = \sqrt{\frac{Z_{ica}}{Z_{icc}}} - 1$$

$$e^{-2\gamma z_e} = \frac{\sqrt{\frac{Z_{ica}}{Z_{icc}}} - 1}{\sqrt{\frac{Z_{ica}}{Z_{icc}}} + 1}$$

$$-2\gamma z_e = Ln\left(\frac{\sqrt{\frac{Z_{ica}}{Z_{icc}}} - 1}{\sqrt{\frac{Z_{ica}}{Z_{icc}}} + 1}\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{2z_e} Ln\left(\frac{\sqrt{\frac{Z_{ica}}{Z_{icc}}} + 1}{\sqrt{\frac{Z_{ica}}{Z_{icc}}} - 1}\right)$$

En nuestro caso

$$\gamma = \frac{1}{2 \cdot 50m} Ln\left(\frac{\sqrt{\frac{333_{|-82'8^\circ}}{23'8_{|64'8^\circ}}} + 1}{\sqrt{\frac{333_{|-82'8^\circ}}{23'8_{|64'8^\circ}}} - 1}\right) = 5'24 \cdot 10^{-3}{}_{|74'49^\circ} \frac{1}{metro}$$

Para calcular los parámetros del cable a partir de estos valores recordemos que

$$\gamma = \sqrt{Z \cdot Y} = \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

Multiplicando ambas expresiones tenemos

$$\gamma \cdot Z_0 = \sqrt{Z \cdot Y}\sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{Z \cdot Y \frac{Z}{Y}} = \sqrt{Z^2}$$

$$Z = \gamma \cdot Z_0$$

Por el contrario, dividiendo las expresiones tenemos

$$\frac{\gamma}{Z_0} = \frac{\sqrt{Z \cdot Y}}{\sqrt{\frac{Z}{Y}}} = \sqrt{Z \cdot Y}\sqrt{\frac{Y}{Z}} = \sqrt{Z \cdot Y \frac{Y}{Z}} = \sqrt{Y^2}$$

$$Y = \frac{\gamma}{Z_0}$$

En nuestro caso tenemos

$$Z = R + j\omega L = \gamma \cdot Z_0 = 5'24 \cdot 10^{-3}{}_{\angle 74'49^\circ} \frac{1}{metro} \cdot 89'09_{\angle -9^\circ}\,\Omega = 0'467_{\angle 65'49^\circ} \frac{\Omega}{m}$$

$$Z = R + j\omega L = \left(0'194 + j0'425\right)\frac{\Omega}{m}$$

de donde

$$R = 0'194\frac{\Omega}{m}$$

$$L = \frac{\mathrm{Im}[Z]}{\omega} = \frac{\mathrm{Im}[Z]}{2\pi f} = \frac{0'425\frac{\Omega}{m}}{2\pi \cdot 10^5\,Hz} = 6'76 \cdot 10^{-7}\,\frac{Henrios}{metro}$$

Por otra parte

$$Y = G + j\omega C = \frac{\gamma}{Z_0} = \frac{5'24 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{metro}{}_{\angle 74'49^\circ}}{89'09_{\angle -9^\circ}\,\Omega} = 5'88 \cdot 10^{-5}{}_{\angle 83'49^\circ}\,\frac{\mho}{m}$$

$$Y = G + j\omega C = \left(6'66 \cdot 10^{-6} + j5'84 \cdot 10^{-5}\right)\frac{\mho}{m}$$

de donde

$$G = 6'66 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mho}{m}$$

$$C = \frac{\mathrm{Im}[Y]}{\omega} = \frac{\mathrm{Im}[Y]}{2\pi f} = \frac{5'84 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mho}{m}}{2\pi \cdot 10^5\,Hz} = 9'30 \cdot 10^{-11}\,\frac{Faradios}{metro}$$