Problema PTC0004-21

En un cable con pérdidas se inyecta un pulso de alta frecuencia. Observando las características de entrada y de salida, calcular:

a) Velocidad de propagación de la señal en el cable
b) Capacitancia del cable
c) Inductancia del cable
d) Resistencia del cable a baja frecuencia
e) Frecuencia pelicular del cable

Datos

- Longitud: 50 metros.
- Impedancia característica: 58 Ω.
- Retardo de propagación de un pulso de alta frecuencia: 254 ns.
- Resistencia de entrada (a frecuencia cero) con la salida en cortocircuito: 2.7 Ω.
- Ganancia a 10 Mhz con el cable cargado con la impedancia característica: 0’847.

Nota: Considerar que no existen pérdidas en el dieléctrico

Solución PTC0004-21

Apartado a)
Podemos calcular fácilmente la velocidad de propagación a partir de los datos del cable, sin más que recordar que

$$velocidad = \frac{longitud}{retardo}$$

$$v = \frac{50m}{254ns} = 196.850'39 \frac{Km}{s}$$

Apartado b)
Llamando

$$Z = R + j\omega L; \quad Y = G + j\omega C$$

sabemos que la impedancia característica del cable es

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$$

A alta frecuencia las partes reactivas de Z e Y son mucho más importantes que las resistivas por lo que podemos escribir

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$$

También sabemos que la velocidad de propagación es

$$v = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

Conociendo el valor de la velocidad de propagación y la impedancia característica del cable, es fácil calcular la capacitancia unitaria sabiendo que

$$v \cdot Z_0 \approx \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{C}$$

$$C \approx \frac{1}{v \cdot Z_0} = \frac{1}{196.850'39 \frac{Km}{s} \cdot 58\Omega} = 8'759 \cdot 10^{-11} \frac{faradios}{metro}$$

Apartado c)
De igual forma, la inductancia unitaria del cable puede calcularse sabiendo que

$$\frac{Z_0}{v} \approx \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}} = \sqrt{L \cdot C} \sqrt{\frac{L}{C}} = L$$

$$L \approx \frac{Z_0}{v} = \frac{58\Omega}{196.850'39 \frac{Km}{s}} = 2'946 \cdot 10^{-7} \frac{henrios}{metro}$$

Apartado d)
A frecuencia cero tenemos que

$$Z = R + j\omega L = R$$

$$Y = G + j\omega C = G$$

Como no existen pérdidas en el dieléctrico *G=0*. Si colocamos el cable en cortocircuito y no influyen *G* (por ser nula), *L* ni *C* (por estar a frecuencia cero) el único efecto es el resistivo por lo que la resistencia de entrada del cable será

$$Z_{in} = R \cdot z_e$$

De ahí deducimos

$$R = \frac{Z_{in}}{z_e} = \frac{2'7\Omega}{50m} = 0'054 \frac{\Omega}{m}$$

Apartado e)
Para calcular la frecuencia pelicular debemos partir de la ganancia (o atenuación) a alta frecuencia. Sabemos que la función de transferencia de un cable con pérdidas es (ver TTC-004)

$$H(\omega) = \frac{1+\rho}{e^{\gamma z_e} + \rho e^{-\gamma z_e}}$$

siendo

$$\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

$$\gamma = \sqrt{Z \cdot Y}$$

Cuando el cable se carga con una impedancia igual a la impedancia característica entonces

$$\rho = \frac{Z_0 - Z_0}{Z_0 + Z_0} = 0$$

y la función de transferencia es

$$H(\omega) = \frac{1}{e^{\gamma z_e}}$$

siendo el espectro de amplitud

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\left|e^{\gamma z_e}\right|}$$

Cuando la frecuencia es grande se puede demostrar (ver PTC0004-19) que

$$|H(\omega)| \approx \frac{1}{e^{\frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}} z_e}}$$

Conociendo la ganancia *G*, *L*, y *C* podemos calcular *R* desarrollando la expresión anterior

$$e^{\frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}} z_e} \approx \frac{1}{|H(\omega)|}$$

$$\frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}} z_e \approx Ln \frac{1}{|H(\omega)|} = -Ln|H(\omega)|$$

$$\frac{RC+GL}{2\sqrt{LC}} z_e \approx Ln \frac{1}{|H(\omega)|} = -Ln|H(\omega)|$$

$$RC + GL \approx -\frac{2\sqrt{LC}\, Ln|H(\omega)|}{z_e}$$

$$R \approx -\frac{2\sqrt{LC}\, Ln|H(\omega)|}{C \cdot z_e} - \frac{GL}{C}$$

$$R \approx -\frac{2}{z_e}\sqrt{\frac{L}{C}} Ln|H(\omega)| - \frac{GL}{C}$$

Para el caso de ausencia de pérdidas en el dieléctrico (*G=0*) tenemos

$$R \approx -\frac{2}{z_e}\sqrt{\frac{L}{C}}Ln\left|H(\omega)\right|$$

$$R \approx -\frac{2}{z_e}Z_0 Ln\left|H(\omega)\right|$$

A la frecuencia de 10 Mhz la resistencia vale

$$R \approx -\frac{2}{z_e}Z_0 Ln\left|H(\omega)\right| = -\frac{2}{50m}\cdot 58\Omega \cdot Ln\left(0'847\right) = 0'385\frac{\Omega}{m}$$

Observamos que la resistencia a alta frecuencia es considerablemente mayor que la de baja frecuencia. Esto es debido al efecto pelicular que, en la zona de alta frecuencia se expresa mediante

$$R = \frac{R_0}{2}\sqrt{\frac{f}{f_s}}$$

de donde

$$\frac{f}{f_s} = \left(\frac{2R}{R_0}\right)^2$$

$$f_s = f\left(\frac{R_0}{2R}\right)^2$$

Sustituyendo los valores de la resistencia a 10 Mhz podemos calcular la frecuencia pelicular

$$f_s = \left(\frac{0.054\frac{\Omega}{m}}{2\cdot 0'385\frac{\Omega}{m}}\right)^2 10^7 Hz = 49'182 Khz$$