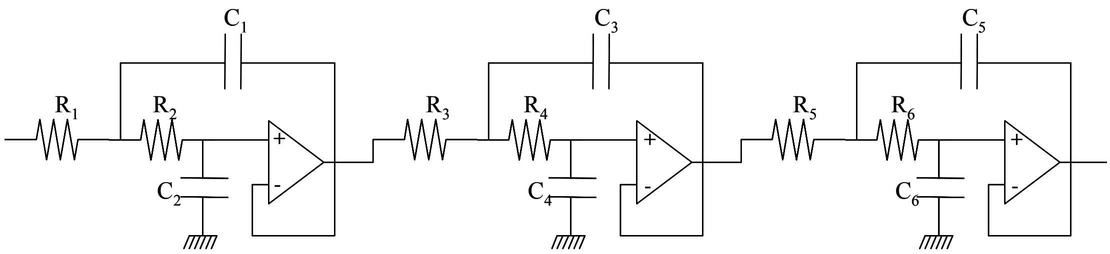
Problema PTC0004-23

Se dispone de un sistema como el de la figura. Calcular:

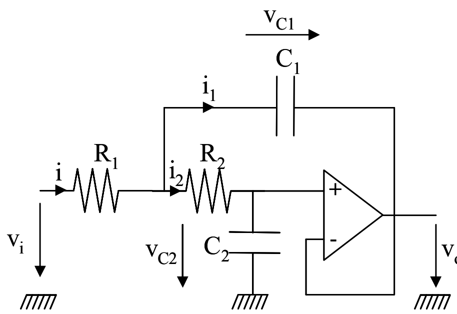
a) El espectro de amplitud del sistema (en escalas lineal y logarítmica).
b) La frecuencia de 3dB.

Datos: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 1K\Omega$;
$C_1 = C_2 = 3'3nF$; $C_3 = 4'7nF$; $C_4 = 2'2nF$; $C_5 = 12nF$; $C_6 = 68pF$



Solución PTC0004-123

Trataremos en primer lugar de determinar la función de transferencia del sistema. Para ello plantearemos las ecuaciones diferenciales que modelan su comportamiento. Como podemos comprobar el circuito está formado por tres etapas de idéntica estructura (aunque con parámetros diferentes) que, al estar constituidas por amplificadores operacionales (que consideraremos ideales), pueden estudiarse de forma independiente cada una de ellas. Así pues, la primera etapa responde al circuito de la figura



Si el amplificador operacional es ideal, las intensidades de entrada por sus terminales inversor y no inversor son nulas, y la tensión entre ambos terminales es nula (cortocircuito virtual). Por lo tanto

$$v_{c2}(t) = v_o(t)$$

Las tensiones en la malla formada por los dos condensadores y la resistencia interior cumplen que

$$i_2(t)R_2 + v_{c2}(t) = v_{c1}(t) + v_o(t)$$

o lo que es lo mismo,

$$v_{c1}(t) = i_2(t)R_2$$

La intensidad por el condensador de la rama superior será

$$i_1(t) = C_1 \frac{dv_{c1}(t)}{dt} = C_1 \frac{d\left[i_2(t)R_2\right]}{dt} = R_2 C_1 \frac{di_2(t)}{dt}$$

La intensidad por el condensador de la rama inferior será

$$i_2(t) = C_2 \frac{dv_{c2}(t)}{dt} = C_2 \frac{dv_o(t)}{dt}$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior tenemos que

$$i_1(t) = R_2 C_1 \frac{di_2(t)}{dt} = R_2 C_1 \frac{d}{dt}\left[C_2 \frac{dv_o(t)}{dt}\right] = R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 v_o(t)}{dt^2}$$

Por otra parte, las tensiones en la malla formada por la primera resistencia y el condensador de la rama superior cumplen que

$$v_i(t) = i(t)R_1 + v_{c1}(t) + v_o(t)$$

$$v_i(t) = i(t)R_1 + i_2(t)R_2 + v_o(t)$$

$$v_i(t) = \left[i_1(t) + i_2(t)\right]R_1 + i_2(t)R_2 + v_o(t) = i_1(t)R_1 + i_2(t)R_1 + i_2(t)R_2 + v_o(t)$$

$$v_i(t) = i_1(t)R_1 + i_2(t)\left(R_1 + R_2\right) + v_o(t)$$

Sustituyendo los valores de las intensidades calculadas anteriormente tenemos

$$v_i(t) = R_1\left[R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 v_o(t)}{dt^2}\right] + \left(R_1 + R_2\right)\left[C_2 \frac{dv_o(t)}{dt}\right] + v_o(t)$$

$$v_i(t) = R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 v_o(t)}{dt^2} + \left(R_1 + R_2\right) C_2 \frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t)$$

Esta ecuación es la que modela el comportamiento temporal del circuito. Para calcular la función de transferencia de la primera etapa no tenemos más que recordar la expresión

$$H_1(\omega) = \frac{P_A(j\omega)}{P_B(j\omega)}$$

donde los polinomios P_A y P_B son los que aparecen en la ecuación diferencial que modela el comportamiento temporal del sistema, de acuerdo con

$$P_A(D)x(t) = P_B(D)y(t)$$

En nuestro caso, el comportamiento temporal se puede expresar como

$$v_i(t) = \left[R_1 R_2 C_1 C_2 D^2 + \left(R_1 + R_2\right) C_2 D + 1\right] v_o(t)$$

por lo que los polinomios son

$$\begin{cases} P_A(D) = 1 \\ P_B(D) = R_1R_2C_1C_2D^2 + \left(R_1 + R_2\right)C_2D + 1 \end{cases}$$

Sustituyendo en la expresión de la función de transferencia tenemos

$$H_1(\omega) = \frac{P_A(j\omega)}{P_B(j\omega)} = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2\left(j\omega\right)^2 + \left(R_1 + R_2\right)C_2 j\omega + 1}$$

$$H_1(\omega) = \frac{1}{-R_1R_2C_1C_2\omega^2 + \left(R_1 + R_2\right)C_2 j\omega + 1}$$

y ordenando

$$H_1(\omega) = \frac{1}{\left(1 - R_1R_2C_1C_2\omega^2\right) + j\omega\left(R_1 + R_2\right)C_2}$$

Esta es la función de transferencia de la primera etapa y, como todas son análogas, también de las dos etapas siguientes, es decir,

$$H_2(\omega) = \frac{1}{\left(1 - R_3R_4C_3C_4\omega^2\right) + j\omega\left(R_3 + R_4\right)C_4}$$

$$H_3(\omega) = \frac{1}{\left(1 - R_5R_6C_5C_6\omega^2\right) + j\omega\left(R_5 + R_6\right)C_6}$$

Expresando las tensiones a la entrada y salida de cada etapa en el dominio de la frecuencia tenemos que

$$V_{o1}(\omega) = H_1(\omega)\cdot V_{i1}(\omega); \quad V_{o2}(\omega) = H_2(\omega)\cdot V_{i2}(\omega); \quad V_{o3}(\omega) = H_3(\omega)\cdot V_{i3}(\omega)$$

Por otra parte,

$$V_i(\omega) = V_{i1}(\omega); \quad V_{o1}(\omega) = V_{i2}(\omega); \quad V_{o2}(\omega) = V_{i3}(\omega); \quad V_o(\omega) = V_{o3}(\omega)$$

por lo que sustituyendo sucesivamente tenemos

$$V_o(\omega) = V_{o3}(\omega) = H_3(\omega)\cdot V_{i3}(\omega) = H_3(\omega)\cdot V_{o2}(\omega)$$

$$V_o(\omega) = H_3(\omega)\cdot\left[H_2(\omega)\cdot V_{i2}(\omega)\right] = H_3(\omega)\cdot H_2(\omega)\cdot V_{o1}(\omega)$$

$$V_o(\omega) = H_3(\omega)\cdot H_2(\omega)\cdot\left[H_1(\omega)\cdot V_{i1}(\omega)\right] = H_3(\omega)\cdot H_2(\omega)\cdot H_1(\omega)\cdot V_{i1}(\omega)$$

$$V_o(\omega) = H_3(\omega)\cdot H_2(\omega)\cdot H_1(\omega)\cdot V_i(\omega)$$

Por tanto, la función de transferencia conjunta (de las tres etapas) será

$$H(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)} = H_1(\omega)\cdot H_2(\omega)\cdot H_3(\omega)$$

$$H(\omega)=\frac{1}{\left(1-R_1R_2C_1C_2\omega^2\right)+j\omega\left(R_1+R_2\right)C_2}\cdot$$
$$\frac{1}{\left(1-R_3R_4C_3C_4\omega^2\right)+j\omega\left(R_3+R_4\right)C_4}\cdot$$
$$\frac{1}{\left(1-R_5R_6C_5C_6\omega^2\right)+j\omega\left(R_5+R_6\right)C_6}$$

$$H(\omega)=\frac{1}{\left(1+j\omega RC\right)^6}$$

o, en términos de frecuencia

$$H(f)=\frac{1}{\left(1-R_1R_2C_1C_2 4\pi^2 f^2\right)+j2\pi f\left(R_1+R_2\right)C_2}\cdot$$
$$\frac{1}{\left(1-R_3R_4C_3C_4 4\pi^2 f^2\right)+j2\pi f\left(R_3+R_4\right)C_4}\cdot$$
$$\frac{1}{\left(1-R_5R_6C_5C_6 4\pi^2 f^2\right)+j2\pi f\left(R_5+R_6\right)C_6}$$

Apartado a)

Con este resultado estamos en condiciones de calcular el espectro de amplitud del sistema que no es más que

$$\left|H(\omega)\right|=\left|\frac{1}{\left(1-R_1R_2C_1C_2\omega^2\right)+j\omega\left(R_1+R_2\right)C_2}\right|\cdot$$
$$\left|\frac{1}{\left(1-R_3R_4C_3C_4\omega^2\right)+j\omega\left(R_3+R_4\right)C_4}\right|\cdot$$
$$\left|\frac{1}{\left(1-R_5R_6C_5C_6\omega^2\right)+j\omega\left(R_5+R_6\right)C_6}\right|$$

o, en términos de frecuencia

$$\left|H(f)\right|=\left|\frac{1}{\left(1-R_1R_2C_1C_2 4\pi^2 f^2\right)+j2\pi f\left(R_1+R_2\right)C_2}\right|\cdot$$
$$\left|\frac{1}{\left(1-R_3R_4C_3C_4 4\pi^2 f^2\right)+j2\pi f\left(R_3+R_4\right)C_4}\right|\cdot$$
$$\left|\frac{1}{\left(1-R_5R_6C_5C_6 4\pi^2 f^2\right)+j2\pi f\left(R_5+R_6\right)C_6}\right|$$

o lo que es lo mismo

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - R_1R_2C_1C_2 4\pi^2 f^2\right)^2 + 4\pi^2 f^2 \left(R_1 + R_2\right)^2 C_2^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - R_3R_4C_3C_4 4\pi^2 f^2\right)^2 + 4\pi^2 f^2 \left(R_3 + R_4\right)^2 C_4^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - R_5R_6C_5C_6 4\pi^2 f^2\right)^2 + 4\pi^2 f^2 \left(R_5 + R_6\right)^2 C_6^2}}$$

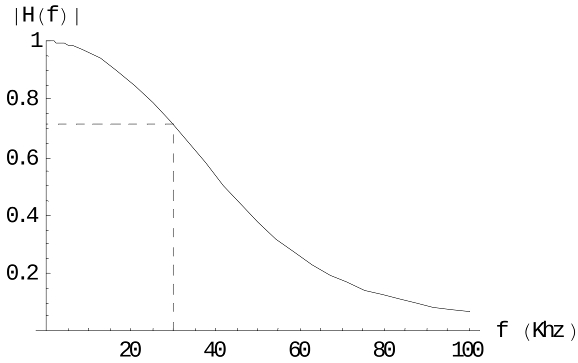


Figura 1 Espectro de amplitud (escala lineal)

La figura 1 representa el espectro de amplitud en escala lineal. Análogamente, la figura 2 lo representa en escala logarítmica.

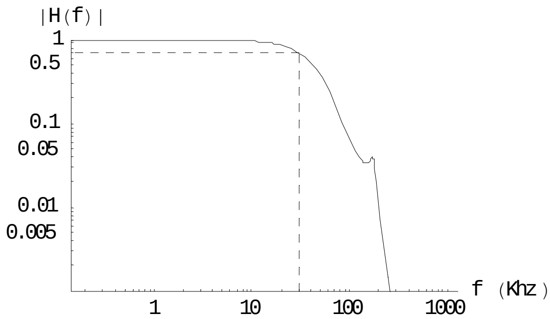


Figura 2. Espectro de amplitud (escala logarítmica)

Apartado b)

El ancho de banda de 3 dB, o la frecuencia de 3 dB (f_{3dB}), se define como aquella en la que la potencia de la señal se divide por 2, o lo que es lo mismo, aquella que cumple

$$|H(f_{3dB})|_{dB} = -3dB$$

$$20\log|H(f_{3dB})| = -3$$

$$\left|H(f_{3dB})\right| = 10^{-\frac{3}{20}} = \left(10^{-\frac{3}{10}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - R_1R_2C_1C_2 4\pi^2 f_{3dB}^2\right)^2 + 4\pi^2 f_{3dB}^2 \left(R_1 + R_2\right)^2 C_2^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - R_3R_4C_3C_4 4\pi^2 f_{3dB}^2\right)^2 + 4\pi^2 f_{3dB}^2 \left(R_3 + R_4\right)^2 C_4^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - R_5R_6C_5C_6 4\pi^2 f_{3dB}^2\right)^2 + 4\pi^2 f_{3dB}^2 \left(R_5 + R_6\right)^2 C_6^2}}$$

O lo que es lo mismo

$$\left[\left(1 - R_1R_2C_1C_2 4\pi^2 f_{3dB}^2\right)^2 + 4\pi^2 f_{3dB}^2 \left(R_1 + R_2\right)^2 C_2^2\right] \cdot \left[\left(1 - R_3R_4C_3C_4 4\pi^2 f_{3dB}^2\right)^2 + 4\pi^2 f_{3dB}^2 \left(R_3 + R_4\right)^2 C_4^2\right] \cdot \left[\left(1 - R_5R_6C_5C_6 4\pi^2 f_{3dB}^2\right)^2 + 4\pi^2 f_{3dB}^2 \left(R_5 + R_6\right)^2 C_6^2\right] = 2$$

Esta ecuación debe ser resuelta por métodos numéricos. Para los valores de los parámetros que se reflejan en el enunciado, el resultado obtenido es

$$f_{3dB} = 29'83\,Khz$$