

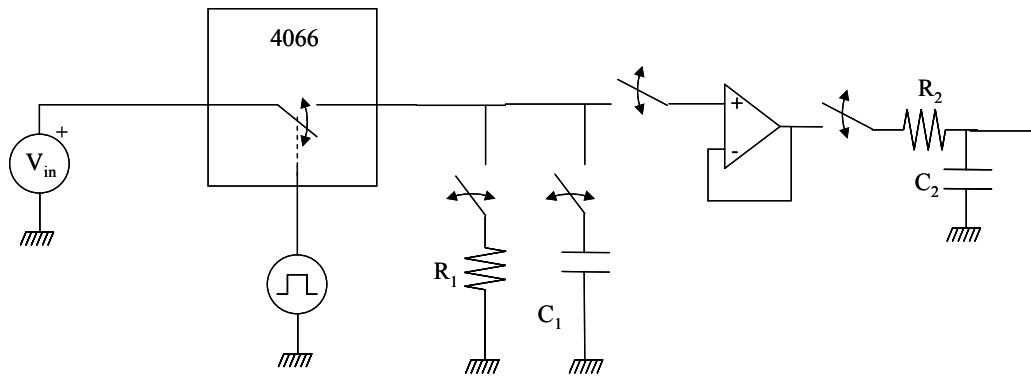
Problema PTC0004-25

Una señal cuadrada de 2 KHz y 5 voltios de amplitud se digitaliza mediante el circuito de la figura. Como señal de muestreo se utiliza una señal cuadrada de 0 a 5 voltios y 40 KHz. de frecuencia. Determinar:

- El espectro de la señal original.
- El espectro de la señal muestreada (muestreo natural) cuando la señal de muestreo tiene un duty-cycle del 50%, 25%, 12'5% y 1%.
- El espectro de la señal muestreada (muestreo plano) para un duty-cycle del 1%.
- El espectro de la señal recuperada para el caso de muestreo natural.
- El espectro de la señal recuperada para el caso de muestreo plano.
- Repetir el apartado anterior para distintas frecuencias de la señal de muestreo.

NOTAS: Obtener los valores de cada una de las componentes espectrales en dBV RMS (sobre 1 voltio RMS: Root Mean Square).

$R_1=R_2=10K\Omega$; $C_1=C_2=1nF$



Solución PTC0004-25

Apartado a)

Sabemos que la señal original que pretendemos muestrear puede representarse genéricamente mediante una función periódica $f(t)$, que admite un desarrollo en serie de Fourier de acuerdo con la expresión

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{fn} e^{j\omega_n t}$$

en la que los coeficientes se calculan de acuerdo con:

$$c_{fn} = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

Según se puede calcular (ver problema PTC0004-08)

$$c_{fn} = AT \text{Sa} \left(\omega_n \frac{T}{2} \right) \quad \forall n > 0$$

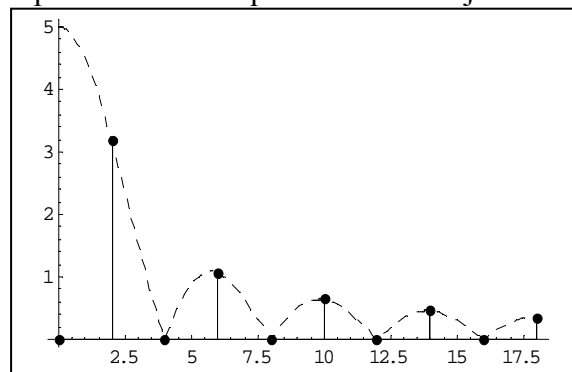
siendo A la amplitud de la señal cuadrada. Cada armónico vale

$$M_{fn} = \frac{|c_{fn}|}{T} + \frac{|c_{-fn}|}{T} \quad \forall n > 0$$

y sustituyendo

$$M_{fn} = \left| 2ASa\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right| \quad \forall n > 0$$

El espectro de amplitud para frecuencias positivas se refleja en la figura siguiente



Para obtener los valores de los armónicos en dB sobre voltios RMS los valores esperados serán

$$M_{fn\text{dBV}_{RMS}} = 20 \log \frac{M_{fn}}{\sqrt{2}} \quad \forall n > 0$$

Los resultados son los siguientes

Frecuencia	Armónico
0 Khz.	$-\infty$ dBV
2 Khz.	13.07 dBV
4 Khz.	$-\infty$ dBV
6 Khz.	3.52 dBV
8 Khz.	$-\infty$ dBV
10 Khz.	-0.91 dBV
12 Khz.	$-\infty$ dBV
14 Khz.	-3.83 dBV
16 Khz.	$-\infty$ dBV
18 Khz.	-6.02 dBV
20 Khz.	$-\infty$ dBV

Apartado b)

Llamando $g(t)$ a la señal muestreada (muestreo natural) sabemos que su espectro vale

$$G(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_c \cdot Sa(i\pi d_c) \cdot F(\omega - i\omega_s)$$

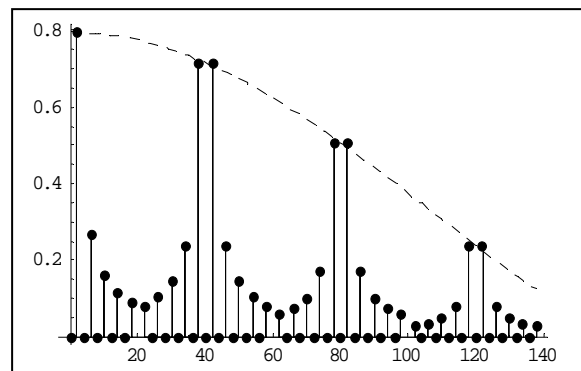
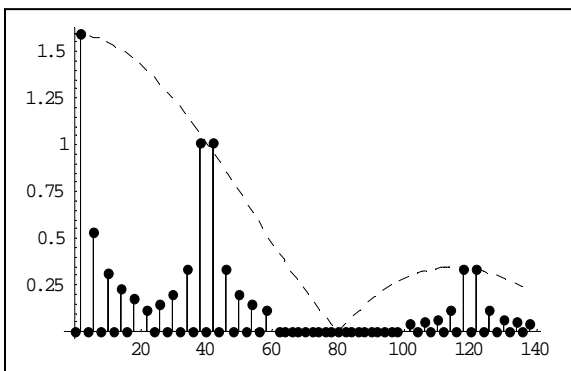
siendo d_c el duty-cycle de la señal de muestreo. Análogamente

$$c_{gn} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_c \cdot Sa(i\pi d_c) \cdot c_{fn,i}$$

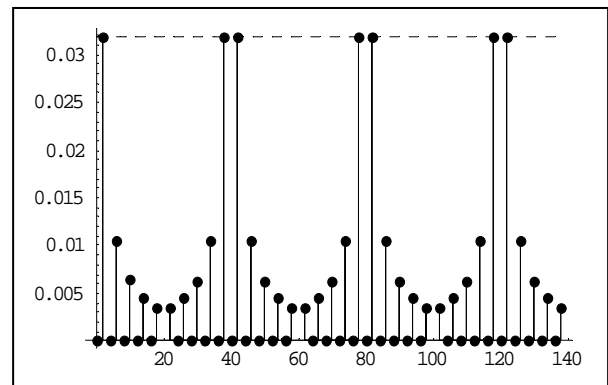
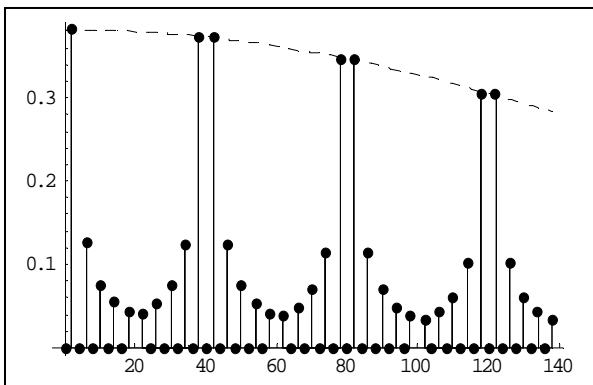
donde $c_{fn,i}$ corresponde a los coeficientes del desarrollo en serie de la señal original, desplazados en frecuencia en la magnitud $i f_s$. Análogamente, para los armónicos podemos escribir

$$M_{gn} = \sum_{i=0}^{\infty} d_c \cdot Sa(i\pi d_c) \cdot M_{fn,i}$$

El espectro de amplitud de la señal muestreada se representa para frecuencias positivas en la figura siguiente para un duty-cycle del 50 y del 25% respectivamente.



Igualmente las figuras siguientes muestran el espectro de la señal muestreada para un duty-cycle del 12,5 y del 1% respectivamente.



Los valores numéricos de los armónicos del primer lóbulo son los siguientes

Lóbulo	Armónicos	dc=50%	dc=25%	dc=12.5%	dc=1%
1	2 Khz.	7.05 dBV	1.03 dBV	-4.99 dBV	-26.93 dBV
1	4 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
1	6 Khz.	-2.50 dBV	-8.52 dBV	-14.54 dBV	-36.46 dBV
1	8 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
1	10 Khz.	-6.93 dBV	-12.95 dBV	-18.97 dBV	-40.91 dBV
1	12 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
1	14 Khz.	-9.86 dBV	-15.88 dBV	-21.90 dBV	-43.83 dBV
1	16 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
1	18 Khz.	-12.04 dBV	-18.06 dBV	-24.08 dBV	-46.02 dBV
1	20 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV

Los valores numéricos del primer armónico de cada lóbulo son los siguientes

Lóbulo	Armónicos	dc=50%	dc=25%	dc=12.5%	dc=1%
1	2 Khz.	7.05 dBV	1.03 dBV	-4.99 dBV	-26.93 dBV
2	42 Khz.	3.12 dBV	0.11 dBV	-5.22 dBV	-26.93 dBV
3	82 Khz.	-∞ dBV	-2.90 dBV	-5.91 dBV	-26.94 dBV
4	122 Khz.	-6.42 dBV	-9.43 dBV	-7.11 dBV	-26.95 dBV
5	162 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-8.92 dBV	-26.96 dBV
6	202 Khz.	-10.86 dBV	-13.87 dBV	-11.54 dBV	-26.97 dBV
7	242 Khz.	-∞ dBV	-12.44 dBV	-15.45 dBV	-26.98 dBV
8	282 Khz.	-13.78 dBV	-16.79 dBV	-22.12 dBV	-27.00 dBV
9	322 Khz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV	-27.02 dBV
10	362 Khz.	-15.96 dBV	-18.97 dBV	-24.30 dBV	-27.05 dBV
11	402 Khz.	-∞ dBV	-16.88 dBV	-19.89 dBV	-27.08 dBV

Apartado c)

Llamando $g_h(t)$ a la señal muestreada (muestreo plano) sabemos que, cuando el ancho del pulso de muestreo es muy pequeño, su espectro vale

$$G_h(\omega) = \frac{1}{d_c} Sa\left(\omega \frac{T_s}{2}\right) \cdot G(\omega)$$

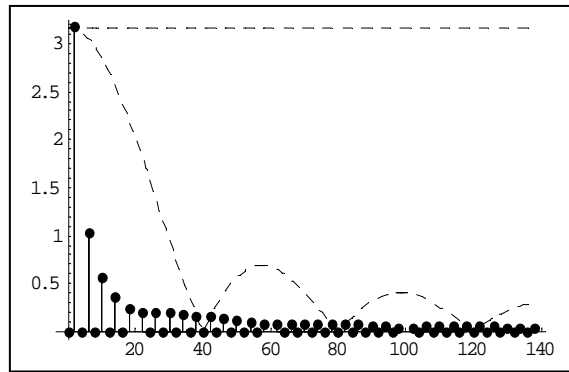
$$G_h(\omega) = \frac{1}{d_c} Sa\left(\omega \frac{T_s}{2}\right) \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_c \cdot Sa(i\pi d_c) \cdot F(\omega - i\omega_s)$$

$$G_h(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} Sa\left(\omega \frac{T_s}{2}\right) \cdot Sa(i\pi d_c) \cdot F(\omega - i\omega_s)$$

Análogamente

$$M_{ghn} = \sum_{i=0}^{\infty} Sa\left(\omega \frac{T_s}{2}\right) \cdot Sa(i\pi d_c) \cdot M_{fn,i}$$

El espectro de amplitud de la señal muestreada (muestreo plano) se representa para frecuencias positivas en la figura siguiente para un duty-cycle del 1%.



En la gráfica anterior aparecen reflejadas dos líneas discontinuas. La primera de ellas (la superior en la gráfica) corresponde al factor

$$Sa(i\pi d_c)$$

para un duty-cycle del 1%, mientras que la segunda (la inferior en la gráfica) corresponde al factor

$$Sa\left(\omega \frac{T_s}{2}\right)$$

Los valores numéricos de los armónicos del primer lóbulo son los siguientes

Lóbulo	Armónicos	dc=1%
1	2 Khz.	13.03 dBV
1	4 Khz.	$-\infty$ dBV
1	6 Khz.	3.2 dBV
1	8 Khz.	$-\infty$ dBV
1	10 Khz.	-1.82 dBV
1	12 Khz.	$-\infty$ dBV
1	14 Khz.	-5.66 dBV
1	16 Khz.	$-\infty$ dBV
1	18 Khz.	-9.13 dBV
1	20 Khz.	$-\infty$ dBV

Los valores numéricos del primer armónico de cada lóbulo son los siguientes

Lóbulo	Armónicos	dc=1%
1	2 Khz.	13.03 dBV
2	42 Khz.	-13.41 dBV
3	82 Khz.	-19.23 dBV
4	122 Khz.	-22.69 dBV
5	162 Khz.	-25.16 dBV
6	202 Khz.	-27.09 dBV
7	242 Khz.	-28.68 dBV
8	282 Khz.	-30.02 dBV
9	322 Khz.	-31.20 dBV
10	362 Khz.	-32.24 dBV
11	402 Khz.	-33.18 dBV

Apartado d)

En el recuperador utilizamos un filtro paso de baja, constituido por un circuito RC, cuya función de transferencia (problema PTC0004-11) sabemos que vale

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

con una frecuencia de corte de 3dB de valor

$$f_{3dB} = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi 10^4 10^{-9}} = 15'9 KHz$$

Llamando $r(t)$ a la señal recuperada (después del muestreo natural) tenemos que

$$R(\omega) = G(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$R(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} d_c \cdot Sa(i\pi d_c) \cdot F(\omega - i\omega_s) \cdot H(\omega)$$

y si los parámetros del muestreador y recuperador están bien calculados, sabemos que la recuperación nos deja aproximadamente sólo el primer lóbulo ($i=0$) por lo que podemos escribir

$$R(\omega) \approx d_c \cdot Sa(0\pi d_c) \cdot F(\omega - 0\omega_s) \cdot H(\omega)$$

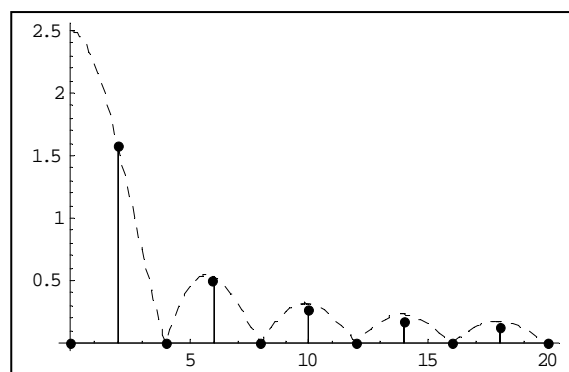
$$R(\omega) \approx d_c \cdot 1 \cdot F(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$R(\omega) \approx d_c \cdot F(\omega)$$

Análogamente, para los armónicos podemos escribir

$$M_m = \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_c \cdot Sa(i\pi d_c) \cdot M_{fn,i} \cdot H(\omega)$$

El espectro de amplitud de la señal recuperada (muestreo natural) se representa para frecuencias positivas en la figura siguiente para un duty-cycle del 50%.



En la gráfica anterior aparecen reflejadas mediante línea discontinua el valor para una recuperación ideal. Los valores numéricos de los armónicos de la señal recuperada son los siguientes

Armónicos	Original	Original/2 y filtrado	Recuperado
2 Khz.	13.07 dBV	6.98 dBV	6.98 dBV
4 Khz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV
6 Khz.	3.52 dBV	-3.07 dBV	-3.07 dBV
8 Khz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV
10 Khz.	-0.91 dBV	-8.38 dBV	-8.38 dBV
12 Khz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV
14 Khz.	-3.83 dBV	-12.34 dBV	-12.34 dBV
16 Khz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV
18 Khz.	-6.02 dBV	-15.62 dBV	-15.62 dBV
20 Khz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV

Apartado e)

En el recuperador utilizamos un filtro paso de baja, constituido por un circuito RC, cuya función de transferencia (problema PTC0004-11) sabemos que vale

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Llamando $r_h(t)$ a la señal recuperada (después del muestreo plano) tenemos que

$$R_h(\omega) = G_h(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$R_h(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} Sa\left(\omega \frac{T_s}{2}\right) \cdot Sa(i\pi d_c) \cdot F(\omega - i\omega_s) \cdot H(\omega)$$

y si los parámetros del muestreador y recuperador están bien calculados, sabemos que la recuperación nos deja aproximadamente sólo el primer lóbulo ($i=0$) por lo que podemos escribir

$$R_h(\omega) \approx Sa\left(\omega \frac{T_s}{2}\right) \cdot Sa(0\pi d_c) \cdot F(\omega - 0\omega_s) \cdot H(\omega)$$

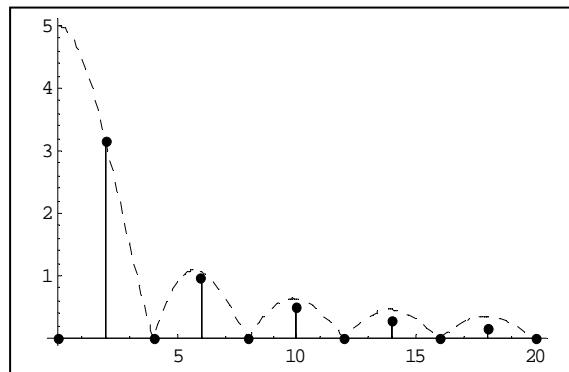
$$R_h(\omega) \approx Sa\left(\omega \frac{T_s}{2}\right) \cdot 1 \cdot F(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$R_h(\omega) \approx Sa\left(\omega \frac{T_s}{2}\right) \cdot F(\omega)$$

Análogamente, para los armónicos podemos escribir

$$M_{rh,n} = \sum_{i=0}^{\infty} Sa\left(\omega \frac{T_s}{2}\right) \cdot Sa(i\pi d_c) \cdot M_{fn,i} \cdot H(\omega)$$

El espectro de amplitud de la señal recuperada (muestreo plano) se representa para frecuencias positivas en la figura siguiente para un duty-cycle del 1%.



En la gráfica anterior aparecen reflejadas mediante línea discontinua el valor para una recuperación ideal. Los valores numéricos de los armónicos de la señal recuperada son los siguientes

Armónicos	Original	Original Filtrado	Recuperado
2 KHz.	13.07 dBV	13.00 dBV	12.96 dBV
4 KHz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
6 KHz.	3.52 dBV	2.95 dBV	2.62 dBV
8 KHz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
10 KHz.	-0.91 dBV	-2.36 dBV	-3.27 dBV
12 KHz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
14 KHz.	-3.83 dBV	-6.32 dBV	-8.15 dBV
16 KHz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV
18 KHz.	-6.02 dBV	-9.60 dBV	-12.71 dBV
20 KHz.	-∞ dBV	-∞ dBV	-∞ dBV

Apartado f)

Si en el caso del muestreo plano utilizamos otras frecuencias de muestreo, los datos de la recuperación son distintos. En la tabla siguiente, obtenida numéricamente, se estudia el comportamiento para frecuencias de 10 a 70 KHz.

Arm.	Orig. (dBV)	Filt. (dBV)	Recup. (10KHz)	Recup. (20KHz)	Recup. (30KHz)	Recup. (40KHz)	Recup. (50KHz)	Recup. (60KHz)	Recup. (70KHz)
2 KHz.	13.07	13.00	13.33	13.35	12.94	12.96	12.98	12.98	12.99
4 KHz.	-∞	-∞	-1.44	-∞	-9.73	-∞	-∞	-∞	-∞
6 KHz.	3.52	2.95	-0.10	3.57	2.37	2.62	2.74	2.80	2.84
8 KHz.	-∞	-∞	-1.36	-∞	-9.78	-∞	-∞	-∞	-∞
10 KHz.	-0.91	-2.36	-∞	-1.84	-4.01	-3.27	-2.94	-2.76	-2.65
12 KHz.	-∞	-∞	-4.12	-∞	-10.39	-∞	-∞	-∞	-∞
14 KHz.	-3.83	-6.32	-9.17	-6.08	-9.69	-8.15	-7.47	-7.12	-6.90
16 KHz.	-∞	-∞	-10.88	-∞	-11.40	-∞	-∞	-∞	-∞
18 KHz.	-6.02	-9.60	-9.26	-9.57	-15.54	-12.71	-11.53	-10.92	-10.56
20 KHz.	-∞	-∞	-∞	-∞	-12.70	-∞	-∞	-∞	-∞