

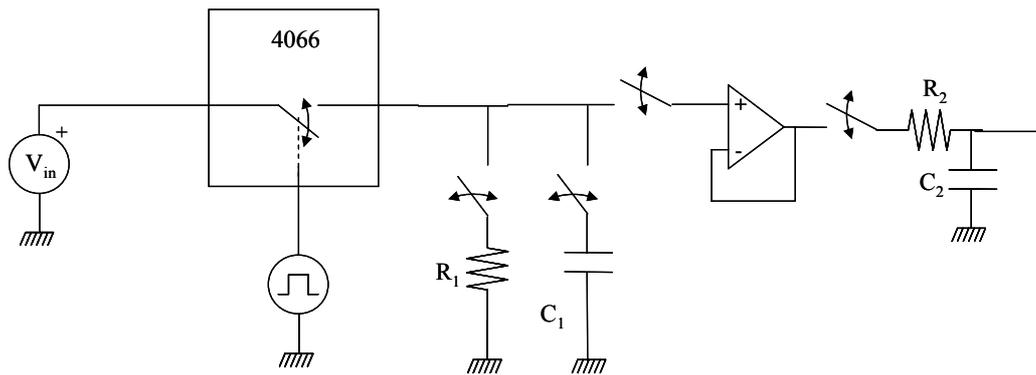
Problema PTC0004-27

Una señal periódica de 300Hz (f_1), constituida en cada período por una función Sample de 5V de amplitud y 12 KHz de frecuencia (f_2) se digitaliza mediante el circuito de la figura. Como señal de muestreo se utiliza una señal cuadrada de 0 a 5 voltios y 40 KHz de frecuencia (f_3). Determinar:

- El espectro de la señal original.
- El espectro de la señal muestreada (muestreo natural) cuando la señal de muestreo tiene un duty-cycle del 50%, 25%, 12'5% y 1%.
- El espectro de la señal muestreada (muestreo plano) para un duty-cycle del 1%.
- El espectro de la señal recuperada para el caso de muestreo natural.
- El espectro de la señal recuperada para el caso de muestreo plano.
- Repetir el apartado anterior para distintas frecuencias de la señal de muestreo.
- Para el caso de un submuestreo a 20 KHz., el espectro de la señal muestreada y recuperada para ambos tipos de muestreo.

NOTAS: Obtener los valores de cada una de las componentes espectrales en dBV RMS (sobre 1 voltio RMS: Root Mean Square).

$R_1=R_2=10K\Omega$; $C_1=C_2=1nF$



Solución PTC0004-27

Apartado a)

Sabemos que la señal original que pretendemos muestrear puede representarse genéricamente mediante una función periódica $f(t)$, que admite un desarrollo en serie de Fourier de acuerdo con la expresión

$$f(t) = \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{fn} e^{j\omega_n t}$$

en la que los coeficientes se calculan de acuerdo con:

$$c_{fn} = \int_{T_1/2}^{T_1/2} f(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

Según se puede demostrar (ver problema PTC0004-10) el valor de los coeficientes anteriores se puede calcular mediante el estudio de un único pulso (no periódico) cuyo espectro vale

$$\begin{cases} c_{fn} \approx F(\omega) = \frac{AT_2}{2} & \forall n \in \left[-\frac{T_1}{T_2}, \frac{T_1}{T_2} \right] \\ c_{fn} \approx F(\omega) = 0 & \forall n \notin \left[-\frac{T_1}{T_2}, \frac{T_1}{T_2} \right] \end{cases}$$

siendo A la amplitud de la señal cuadrada. Cada armónico vale

$$M_{fn} = \frac{|c_{fn}|}{T_1} + \frac{|c_{-fn}|}{T_1} \quad \forall n > 0$$

y sustituyendo

$$M_{fn} \approx \frac{AT_2}{T_1} \quad \forall 0 \leq n \leq \frac{T_1}{T_2}$$

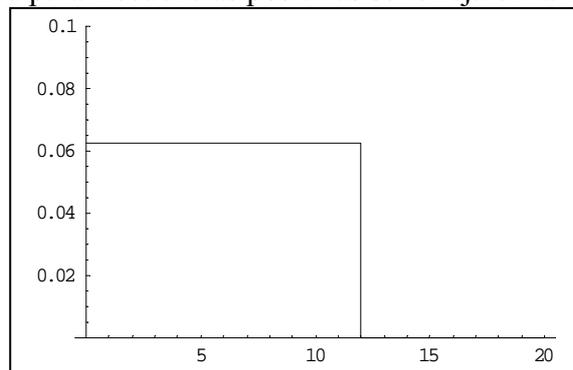
Si llamamos r a la relación entre las dos frecuencias, f_1 y f_2 , que constituyen la señal original, tenemos que

$$r \equiv \frac{f_2}{f_1} = \frac{T_1}{T_2}$$

y sustituyendo en la anterior

$$M_{fn} \approx \frac{A}{r} \quad \forall 0 \leq n \leq r$$

El espectro de amplitud para frecuencias positivas se refleja en la figura siguiente



Para obtener los valores de los armónicos en dB sobre voltios RMS los valores esperados serán

$$M_{fn dBV_{RMS}} = 20 \log \frac{M_{fn}}{\sqrt{2}} \quad \forall 0 \leq n \leq r$$

Sustituyendo los valores tenemos

$$M_{fndBV_{RMS}} = 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{A}{r} \right) \quad \forall 0 \leq f \leq f_2$$

$$M_{fndBV_{RMS}} = 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{5}{40} \right) \quad \forall 0 \leq f \leq 12Khz$$

$$M_{fndBV_{RMS}} = 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{5}{40} \right) \quad \forall 0 \leq f \leq 12Khz$$

$$M_{fndBV_{RMS}} = -21.07dBV_{RMS} \quad \forall 0 \leq f \leq 12Khz$$

Apartado b)

Llamando $g(t)$ a la señal muestreada (muestreo natural) sabemos que su espectro vale

$$G(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_c \cdot Sa(i\pi d_c) \cdot F(\omega - i\omega_s)$$

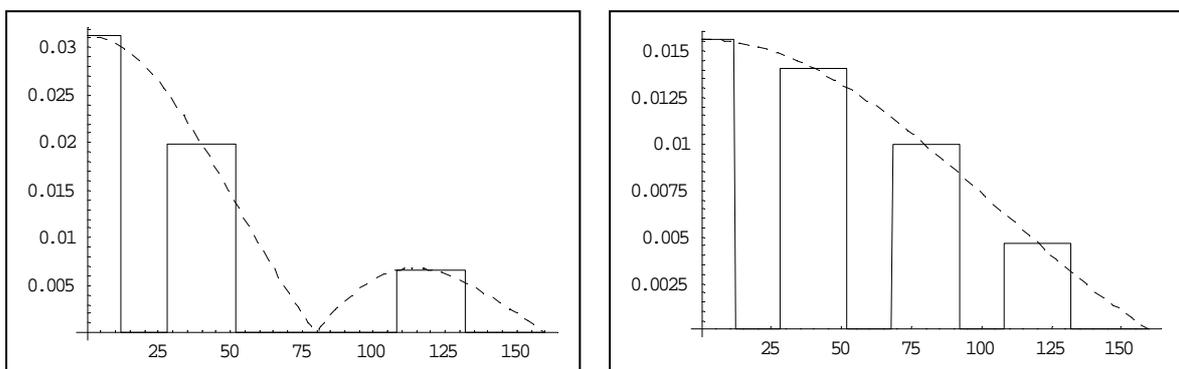
siendo d_c el duty-cycle de la señal de muestreo. Análogamente

$$c_{gn} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_c \cdot Sa(i\pi d_c) \cdot c_{fn,i}$$

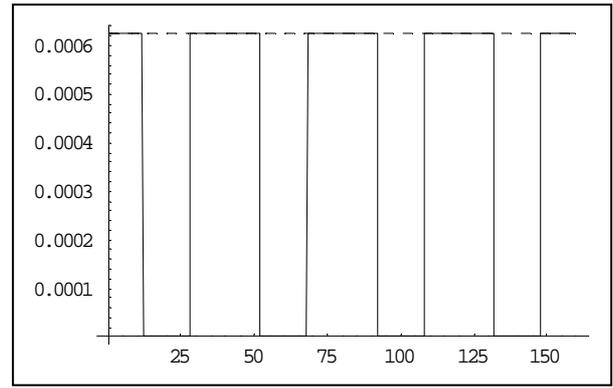
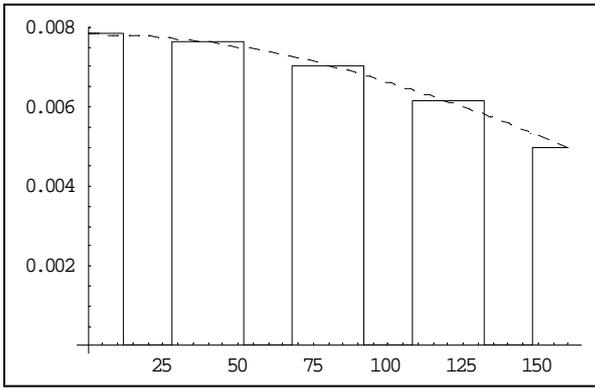
donde $c_{fn,i}$ corresponde a los coeficientes del desarrollo en serie de la señal original, desplazados en frecuencia en la magnitud $i \cdot f_s$. Análogamente, para los armónicos podemos escribir

$$M_{gn} = \sum_{i=0}^{\infty} d_c \cdot Sa(i\pi d_c) \cdot M_{fn,i}$$

El espectro de amplitud de la señal muestreada se representa para frecuencias positivas en la figura siguiente para un duty-cycle del 50 y del 25% respectivamente.



Igualmente las figuras siguientes muestran el espectro de la señal muestreada para un duty-cycle del 12,5 y del 1% respectivamente.



Los valores numéricos de los armónicos de cada lóbulo son los siguientes

Lóbulo	Armónicos (Khz)	dc=50%	dc=25%	dc=12.5%	dc=1%
1	0-20	-27.09 dBV	-33.11 dBV	-39.14 dBV	-61.07 dBV
2	20-60	-31.02 dBV	-42.67 dBV	-39.36 dBV	-61.07 dBV
3	60-100	-355.3 dBV	-51.23 dBV	-40.05 dBV	-61.08 dBV
4	100-140	-40.56 dBV	-61.19 dBV	-41.25 dBV	-61.09 dBV
5	140-180	-355.3 dBV	-381.4 dBV	-43.06 dBV	-61.10 dBV
6	180-220	-44.99 dBV	-70.02 dBV	-45.68 dBV	-61.11 dBV
7	220-260	-355.3 dBV	-70.17 dBV	-49.59 dBV	-61.12 dBV
8	260-300	-47.92 dBV	-75.85 dBV	-56.26 dBV	-61.14 dBV
9	300-340	-355.3 dBV	-387.4 dBV	-367.3 dBV	-61.16 dBV
10	340-380	-50.10 dBV	-80.21 dBV	-58.44 dBV	-61.19 dBV
11	380-420	-355.3 dBV	-79.03 dBV	-54.03 dBV	-61.22 dBV

Apartado c)

Llamando $g_h(t)$ a la señal muestreada (muestreo plano) sabemos que, cuando el ancho del pulso de muestreo es muy pequeño, su espectro vale

$$G_h(\omega) = \frac{1}{d_c} Sa\left(\omega \frac{T_s}{2}\right) \cdot G(\omega)$$

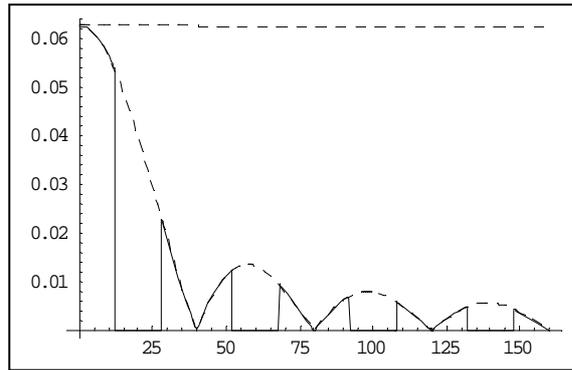
$$G_h(\omega) = \frac{1}{d_c} Sa\left(\omega \frac{T_s}{2}\right) \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_c \cdot Sa(i\pi d_c) \cdot F(\omega - i\omega_s)$$

$$G_h(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} Sa\left(\omega \frac{T_s}{2}\right) \cdot Sa(i\pi d_c) \cdot F(\omega - i\omega_s)$$

Análogamente

$$M_{ghn} = \sum_{i=0}^{\infty} Sa\left(\omega \frac{T_s}{2}\right) \cdot Sa(i\pi d_c) \cdot M_{fn,i}$$

El espectro de amplitud de la señal muestreada (muestreo plano) se representa para frecuencias positivas en la figura siguiente para un duty-cycle del 1%.



En la gráfica anterior aparecen reflejadas dos líneas discontinuas. La primera de ellas (la superior en la gráfica) corresponde al factor

$$Sa(i\pi d_c)$$

para un duty-cycle del 1%, mientras que la segunda (la inferior en la gráfica) corresponde al factor

$$Sa\left(\omega \frac{T_s}{2}\right)$$

Los valores numéricos del primer armónico de cada lóbulo son los siguientes

Lóbulo	Armónicos (Khz)	dc=50%	dc=25%	dc=12.5%	dc=1%
1	12	-22.40 dBV	-22.40 dBV	-22.40 dBV	-22.40 dBV
2	52	-39.06 dBV	-36.05 dBV	-35.36 dBV	-35.14 dBV
3	72	-368.3 dBV	-44.01 dBV	-41.00 dBV	-40.10 dBV
4	132	-56.70 dBV	-53.68 dBV	-45.34 dBV	-43.24 dBV
5	172	-373.7 dBV	-373.7 dBV	-49.45 dBV	-45.55 dBV
6	212	-65.24 dBV	-62.23 dBV	-53.89 dBV	-47.38 dBV
7	252	-377.0 dBV	-62.31 dBV	-59.30 dBV	-48.89 dBV
8	292	-70.95 dBV	-67.94 dBV	-67.25 dBV	-50.19 dBV
9	332	-379.4 dBV	-379.4 dBV	-379.4 dBV	-51.33 dBV
10	372	-75.23 dBV	-72.22 dBV	-71.53 dBV	-52.34 dBV
11	412	-381.3 dBV	-71.01 dBV	-68.00 dBV	-53.26 dBV

Apartado d)

En el recuperador utilizamos un filtro paso de baja, constituido por un circuito RC, cuya función de transferencia (problema PTC0004-11) sabemos que vale

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

con una frecuencia de corte de 3dB de valor

$$f_{3dB} = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi 10^4 10^{-9}} = 15.9 \text{ KHz}$$

Llamando $r(t)$ a la señal recuperada (después del muestreo natural) tenemos que

$$R(\omega) = G(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$R(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_c \cdot Sa(i\pi d_c) \cdot F(\omega - i\omega_s) \cdot H(\omega)$$

y si los parámetros del muestreador y recuperador están bien calculados, sabemos que la recuperación nos deja aproximadamente sólo el primer lóbulo ($i=0$) por lo que podemos escribir

$$R(\omega) \approx d_c \cdot Sa(0\pi d_c) \cdot F(\omega - 0\omega_s) \cdot H(\omega)$$

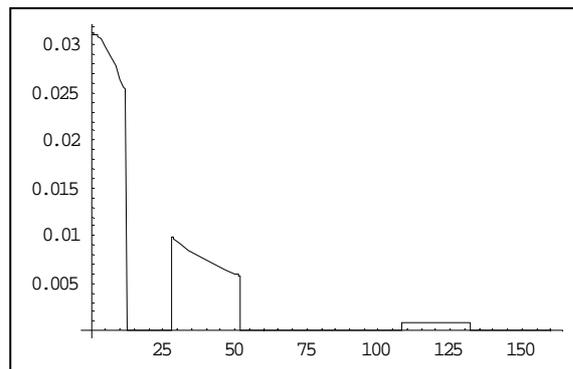
$$R(\omega) \approx d_c \cdot 1 \cdot F(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$R(\omega) \approx d_c \cdot F(\omega)$$

Análogamente, para los armónicos podemos escribir

$$M_m = \sum_{i=0}^{\infty} d_c \cdot Sa(i\pi d_c) \cdot M_{fn,i} \cdot H(\omega)$$

El espectro de amplitud de la señal recuperada (muestreo natural) se representa para frecuencias positivas en la figura siguiente para un duty-cycle del 50%.



Los valores numéricos del centro de cada lóbulo de la señal recuperada son los siguientes

Armónicos	Original	Original/2 y filtrado	Recuperado
0 KHz.	-21.07 dBV	-27.09 dBV	-27.09dBV
40 KHz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	-39.66 dBV
80 KHz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	-369.5 dBV
120 KHz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	-58.18 dBV
160 KHz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	-375.4 dBV
200 KHz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	-67.01 dBV
240 KHz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	-378.9 dBV
280 KHz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	-72.8 dBV
320 KHz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	-381.4 dBV
360 KHz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	-77.20 dBV
400 KHz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	-383.4 dBV

Apartado e)

En el recuperador utilizamos un filtro paso de baja, constituido por un circuito RC, cuya función de transferencia (problema PTC0004-11) sabemos que vale

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Llamando $r_h(t)$ a la señal recuperada (después del muestreo plano) tenemos que

$$R_h(\omega) = G_h(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$R_h(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} Sa\left(\omega \frac{T_s}{2}\right) \cdot Sa(i\pi d_c) \cdot F(\omega - i\omega_s) \cdot H(\omega)$$

y si los parámetros del muestreador y recuperador están bien calculados, sabemos que la recuperación nos deja aproximadamente sólo el primer lóbulo ($i=0$) por lo que podemos escribir

$$R_h(\omega) \approx Sa\left(\omega \frac{T_s}{2}\right) \cdot Sa(0\pi d_c) \cdot F(\omega - 0\omega_s) \cdot H(\omega)$$

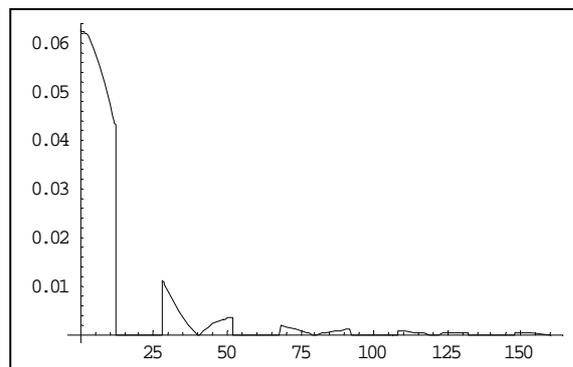
$$R_h(\omega) \approx Sa\left(\omega \frac{T_s}{2}\right) \cdot 1 \cdot F(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$R_h(\omega) \approx Sa\left(\omega \frac{T_s}{2}\right) \cdot F(\omega)$$

Análogamente, para los armónicos podemos escribir

$$M_{rhn} = \sum_{i=0}^{\infty} Sa\left(\omega \frac{T_s}{2}\right) \cdot Sa(i\pi d_c) \cdot M_{fn,i} \cdot H(\omega)$$

El espectro de amplitud de la señal recuperada (muestreo plano) se representa para frecuencias positivas en la figura siguiente para un duty-cycle del 1%.

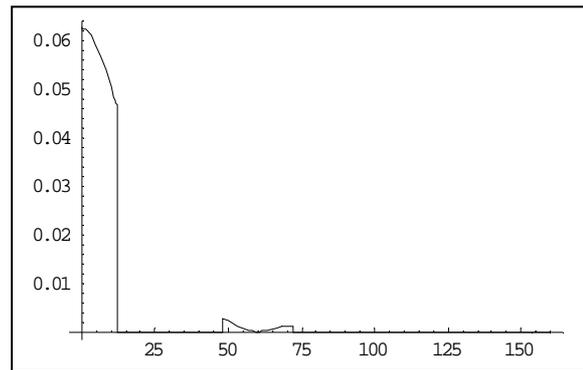
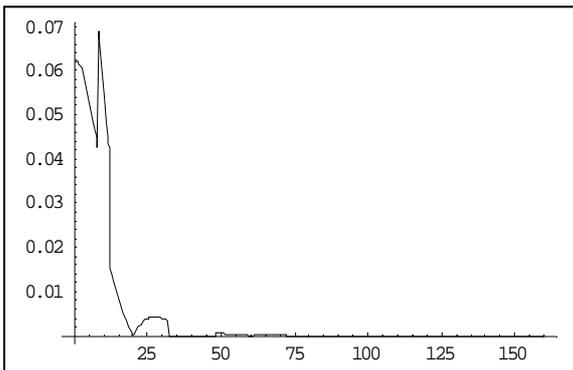


Los valores numéricos del centro de cada lóbulo de la señal recuperada son los siguientes

Armónicos	Original	Original Filtrado	Recuperado
12 Khz.	-21.07 dBV	-23.03dBV	-24.35 dBV
52 Khz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	-45.81 dBV
72 Khz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	-55.46 dBV
132 Khz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	-61.68 dBV
172 Khz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	-66.26 dBV
212 Khz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	-69.89 dBV
252 Khz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	-72.90 dBV
292 Khz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	-75.48 dBV
332 Khz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	-77.73 dBV
372 Khz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	-79.72 dBV
412 Khz.	$-\infty$ dBV	$-\infty$ dBV	-81.52 dBV

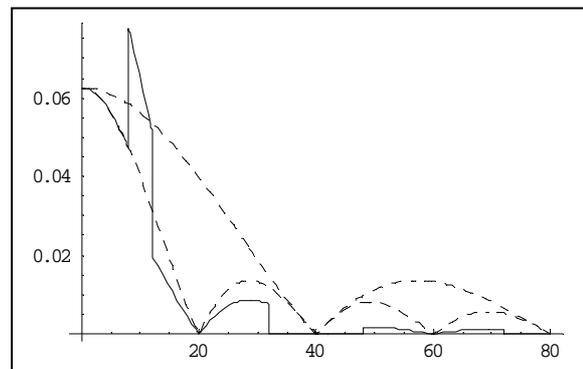
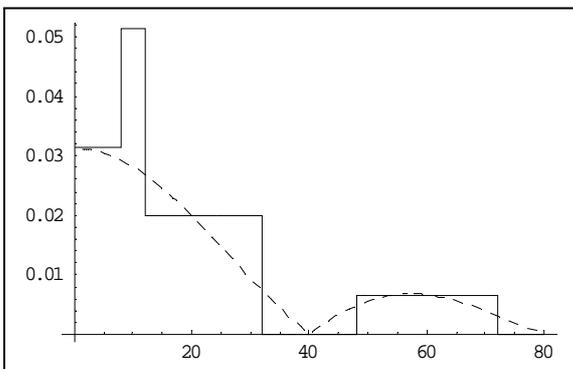
Apartado f)

Si en el caso del muestreo plano utilizamos otras frecuencias de muestreo, los datos de la recuperación son distintos. En las figuras siguientes se estudia el comportamiento para frecuencias de 20 y 60 Khz.



Apartado g)

Para el caso de un submuestreo se produce un solape de los lóbulos que se refleja en las figuras siguientes para el muestreo natural y el muestreo plano respectivamente



De igual forma, los espectros de las señales recuperadas en ambos casos son las siguientes

