Problema PTC0004-29

Una señal cuadrada de 1 Khz y 1 voltio de amplitud modula en amplitud una portadora senoidal de 10 Khz y 5 voltios de amplitud. El índice de modulación es 1. Determinar:

a) El espectro de la señal original.
b) El espectro de la señal modulada.
c) Repetir el apartado anterior para distintas amplitudes de la señal modulante.

Solución PTC0004-29

Apartado a)

Sabemos que la señal modulante puede representarse genéricamente mediante una función periódica *f(t)*, que admite un desarrollo en serie de Fourier de acuerdo con la expresión

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{fn} e^{j\omega_n t}$$

en la que los coeficientes se calculan de acuerdo con:

$$c_{fn} = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

Según se puede calcular (ver problema PTC0004-08)

$$c_{fn} = 2AdSa\left(\omega_n \frac{d}{2}\right) \quad \forall n > 0$$

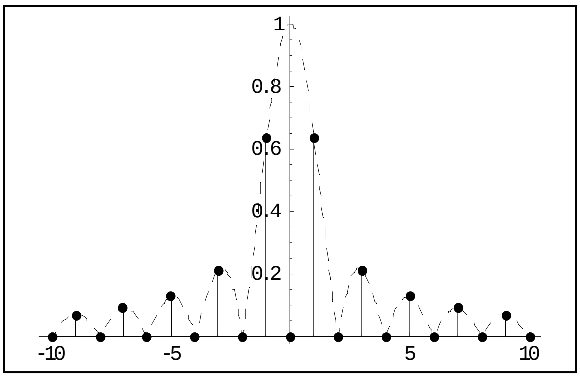
siendo *A* la amplitud de la señal cuadrada. Cada armónico vale

$$M_{fn} = \frac{\left|c_{fn}\right|}{T} + \frac{\left|c_{-fn}\right|}{T} \quad \forall n > 0$$

y sustituyendo

$$M_{fn} = \left|2ASa\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right| \quad \forall n > 0$$

El espectro de amplitud se refleja en la figura siguiente



Para obtener los valores de los armónicos en dB sobre voltios RMS los valores esperados serán

$$M_{fndBV_{RMS}} = 20\log\frac{M_{fn}}{\sqrt{2}} \quad \forall n > 0$$

Los resultados son los siguientes

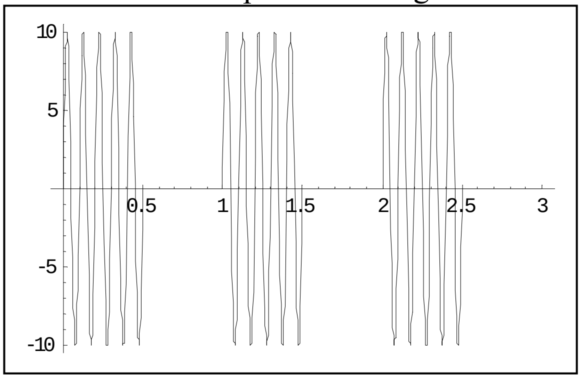
Frecuencia (en Khz.)	**Armónico** (en dBV)
0	-∞
1	-0.91
2	-∞
3	-10.45
4	-∞
5	-14.89
6	-∞
7	-17.81
8	-∞
9	-20.00
10	-∞

Apartado b)

Llamando *g(t)* a la señal modulada sabemos que

$$g(t) = A_p\left[1 + m \cdot f(t)\right]\cos\left(\omega_p t\right)$$

siendo *m* el índice de modulación. Su representación gráfica es la siguiente



Para calcular su espectro escribimos

$$g(t)=A_p \cos\left(\omega_p t\right)+A_p m f(t)\cos\left(\omega_p t\right)$$

$$G(\omega)=\mathscr{F}\left[g(t)\right]=\mathscr{F}\left[A_p \cos\left(\omega_p t\right)+A_p m f(t)\cos\left(\omega_p t\right)\right]$$

$$G(\omega)=\mathscr{F}\left[A_p \cos\left(\omega_p t\right)\right]+\mathscr{F}\left[A_p m f(t)\cos\left(\omega_p t\right)\right]$$

El primer sumando corresponde a la portadora senoidal y su espectro será

$$P(\omega)=\mathscr{F}\left[A_p \cos\left(\omega_p t\right)\right]$$

de donde

$$G(\omega)=P(\omega)+\mathscr{F}\left[A_p m f(t)\cos\left(\omega_p t\right)\right]$$

Por otra parte, el segundo sumando vale

$$G_2(\omega)=\mathscr{F}\left[A_p m f(t)\cos\left(\omega_p t\right)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} A_p m f(t)\cos\left(\omega_p t\right)e^{-j\omega t}dt$$

$$G_2(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} A_p m f(t)\frac{e^{j\omega_p t}+e^{-j\omega_p t}}{2}e^{-j\omega t}dt$$

$$G_2(\omega)=\frac{A_p m}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\left(\omega-\omega_p\right)t}dt+\frac{A_p m}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\left(\omega+\omega_p\right)t}dt$$

$$G_2(\omega)=\frac{A_p m}{2}F(\omega-\omega_p)+\frac{A_p m}{2}F(\omega+\omega_p)$$

$$G_2(\omega)=\frac{A_p m}{2}\left[F(\omega-\omega_p)+F(\omega+\omega_p)\right]$$

Por lo tanto, finalmente, el espectro de una señal modulada en amplitud vale

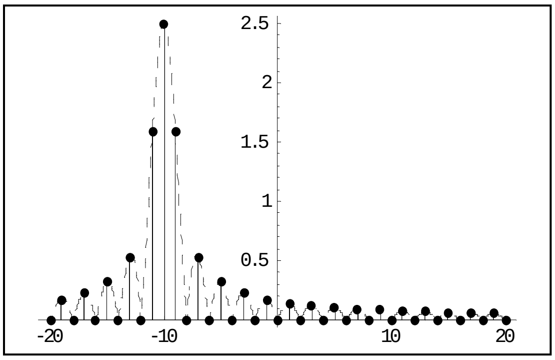
$$G(\omega)=P(\omega)+\frac{A_p m}{2}\left[F\left(\omega-\omega_p\right)+F\left(\omega+\omega_p\right)\right]$$

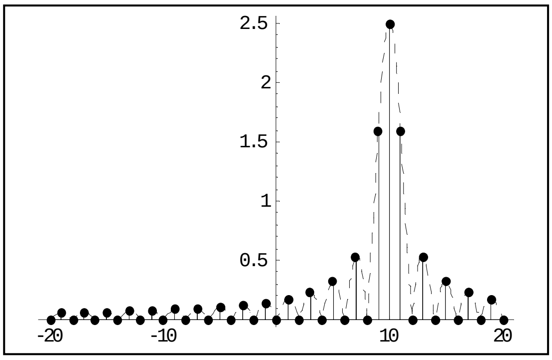
Análogamente

$$c_{gn}=c_{pn}+\frac{A_p m}{2}c_{fn,\omega_p}+\frac{A_p m}{2}c_{fn,-\omega_p}$$

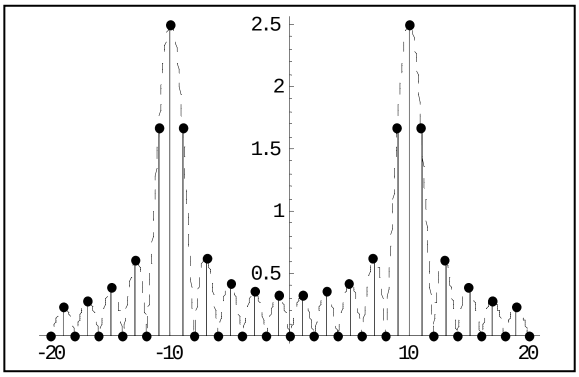
donde $c_{fn,\omega p}$ corresponde a los coeficientes del desarrollo en serie de la señal original, desplazados en frecuencia en la magnitud f_p; mientras que $c_{fn,-\omega p}$ corresponde a los coeficientes del desarrollo en serie de la señal original, desplazados en frecuencia en la magnitud $-f_p$.

En las figuras siguientes se reflejan respectivamente cada uno de los dos sumandos del espectro de amplitud de la señal modulada, $c_{fn,-\omega p}$ y $c_{fn,\omega p}$.





El espectro de amplitud completo de la señal modulada, c_{gn}, se refleja en la figura siguiente



Análogamente, para los armónicos podemos escribir

$$M_{gn} = M_{pn} + \frac{A_p m}{2} M_{fn,\omega_p} + \frac{A_p m}{2} M_{fn,-\omega_p}$$

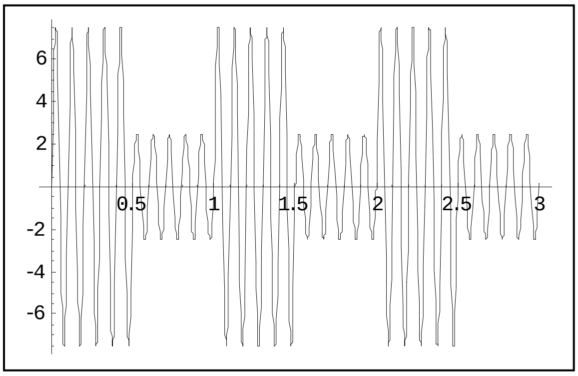
expresión en la que $M_{fn,\omega p}$ representa a los armónicos (bilaterales) correspondientes al espectro de la modulante centrado en ω_p.

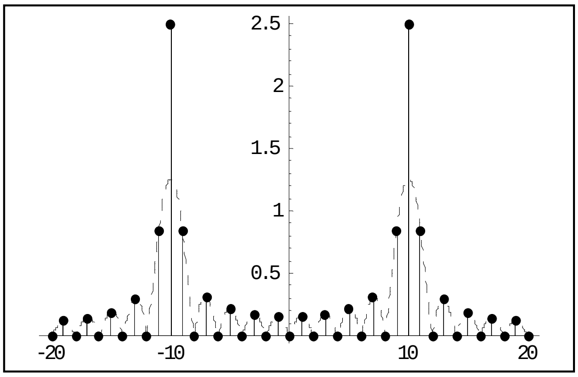
Los valores numéricos de los armónicos son los siguientes

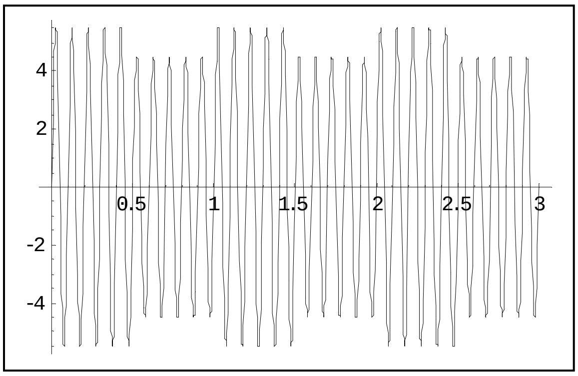
Frecuencia (en Khz.)	**Armónico** (en dBV)
0	-∞
1	-6.85
2	-∞
3	-6.11
4	-∞
5	-4.43
6	-∞
7	-1.08
8	-∞
9	7.49
10	10.97
11	7.45
12	-∞
13	-1.43
14	-∞
15	-5.35
16	-∞
17	-7.85
18	-∞
19	-9.69
20	-∞

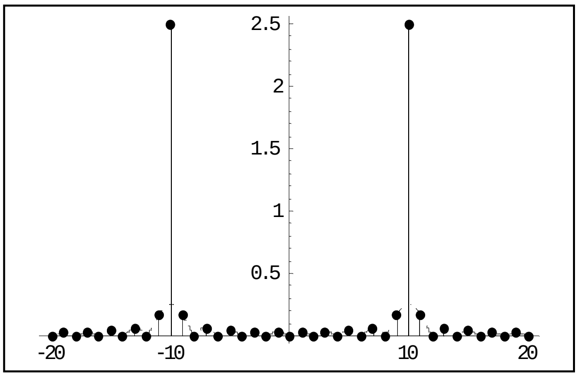
Apartado c)

En la figura se representan las señales moduladas y sus espectros cuando la amplitud de la modulante es, respectivamente, de 0.5V y de 0.1V.









Los valores numéricos de los armónicos son

Frecuencia (en Khz.)	**Armónico** (en dBV)		
	A=1V	A=0.5V	A=0.1V
0	-∞	-∞	-∞
1	-6.85	-12.87	-26.85
2	-∞	-∞	-∞
3	-6.11	-12.13	-26.11
4	-∞	-∞	-∞
5	-4.43	-10.45	-24.43
6	-∞	-∞	-∞
7	-1.08	-7.10	-21.08
8	-∞	-∞	-∞
9	7.49	1.47	-12.51
10	10.97	10.97	10.97
11	7.45	1.43	-12.55
12	-∞	-∞	-∞
13	-1.43	-7.45	-21.43
14	-∞	-∞	-∞
15	-5.35	-11.37	-25.35
16	-∞	-∞	-∞
17	-7.85	-13.87	-27.85
18	-∞	-∞	-∞
19	-9.69	-15.71	-29.69
20	-∞	-∞	-∞