Problema PTC0004-30

Una señal triangular de 1 Khz y 1 voltio de amplitud modula en amplitud una portadora senoidal de 10 Khz y 5 voltios de amplitud. El índice de modulación es 1. Determinar:

a) El espectro de la señal original.
b) El espectro de la señal modulada.
c) Repetir el apartado anterior para distintas amplitudes de la señal modulante.

Solución PTC0004-30

Apartado a)

Sabemos que la señal modulante puede representarse genéricamente mediante una función periódica *f(t)*, que admite un desarrollo en serie de Fourier de acuerdo con la expresión

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{fn} e^{j\omega_n t}$$

en la que los coeficientes se calculan de acuerdo con:

$$c_{fn} = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

Según se puede calcular (ver problema PTC0004-09)

$$c_{fn} = ATSa^2\left(n\frac{\pi}{2}\right) - ATSa(n\pi)$$

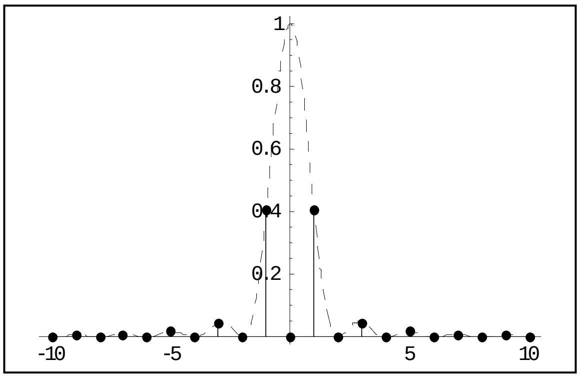
siendo A la amplitud de la señal triangular. Cada armónico vale

$$M_{fn} = \frac{|c_{fn}|}{T} + \frac{|c_{-fn}|}{T} \quad \forall n > 0$$

y sustituyendo

$$M_{fn} = \left|2ASa^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right| \quad \forall n > 0$$

El espectro de amplitud se refleja en la figura siguiente



Para obtener los valores de los armónicos en dB sobre voltios RMS los valores esperados serán

$$M_{fndBV_{RMS}} = 20\log\frac{M_{fn}}{\sqrt{2}} \quad \forall n > 0$$

Los resultados son los siguientes

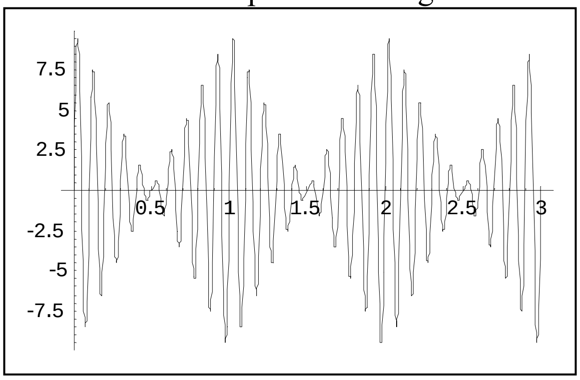
Frecuencia (en Khz.)	**Armónico** (en dBV)
0	-∞
1	-4.83
2	-∞
3	-23.92
4	-∞
5	-32.79
6	-∞
7	-38.64
8	-∞
9	-43.00
10	-∞

Apartado b)

Llamando *g(t)* a la señal modulada sabemos que

$$g(t) = A_p\left[1 + m\cdot f(t)\right]\cos\left(\omega_p t\right)$$

siendo *m* el índice de modulación. Su representación gráfica es la siguiente



Para calcular su espectro escribimos

$$g(t) = A_p \cos\left(\omega_p t\right) + A_p m f(t) \cos\left(\omega_p t\right)$$

$$G(\omega) = \mathcal{F}\left[g(t)\right] = \mathcal{F}\left[A_p \cos\left(\omega_p t\right) + A_p m f(t) \cos\left(\omega_p t\right)\right]$$

$$G(\omega) = \mathcal{F}\left[A_p \cos\left(\omega_p t\right)\right] + \mathcal{F}\left[A_p m f(t) \cos\left(\omega_p t\right)\right]$$

El primer sumando corresponde a la portadora senoidal y su espectro será

$$P(\omega) = \mathcal{F}\left[A_p \cos\left(\omega_p t\right)\right]$$

de donde

$$G(\omega) = P(\omega) + \mathcal{F}\left[A_p m f(t) \cos\left(\omega_p t\right)\right]$$

Por otra parte, el segundo sumando vale

$$G_2(\omega) = \mathcal{F}\left[A_p m f(t) \cos\left(\omega_p t\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} A_p m f(t) \cos\left(\omega_p t\right) e^{-j\omega t} dt$$

$$G_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A_p m f(t) \frac{e^{j\omega_p t} + e^{-j\omega_p t}}{2} e^{-j\omega t} dt$$

$$G_2(\omega) = \frac{A_p m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\left(\omega - \omega_p\right)t} dt + \frac{A_p m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\left(\omega + \omega_p\right)t} dt$$

$$G_2(\omega) = \frac{A_p m}{2} F(\omega - \omega_p) + \frac{A_p m}{2} F(\omega + \omega_p)$$

$$G_2(\omega) = \frac{A_p m}{2}\left[F(\omega - \omega_p) + F(\omega + \omega_p)\right]$$

Por lo tanto, finalmente, el espectro de una señal modulada en amplitud vale

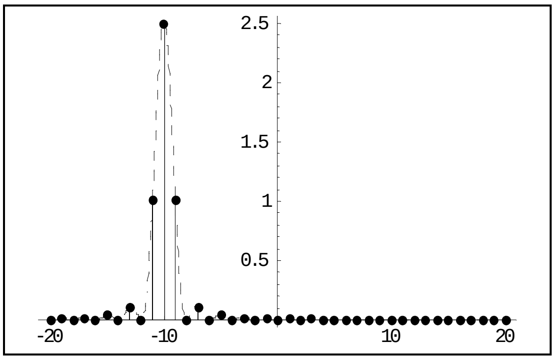
$$G(\omega) = P(\omega) + \frac{A_p m}{2}\left[F\left(\omega - \omega_p\right) + F\left(\omega + \omega_p\right)\right]$$

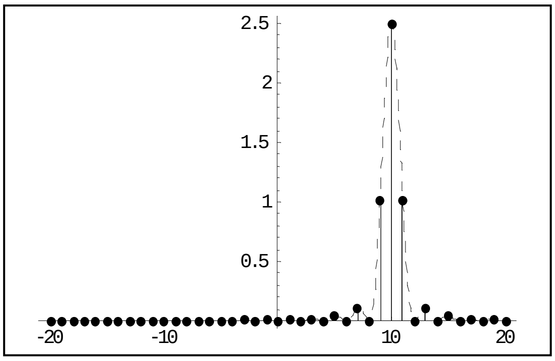
Análogamente

$$c_{gn} = c_{pn} + \frac{A_p m}{2} c_{fn,\omega_p} + \frac{A_p m}{2} c_{fn,-\omega_p}$$

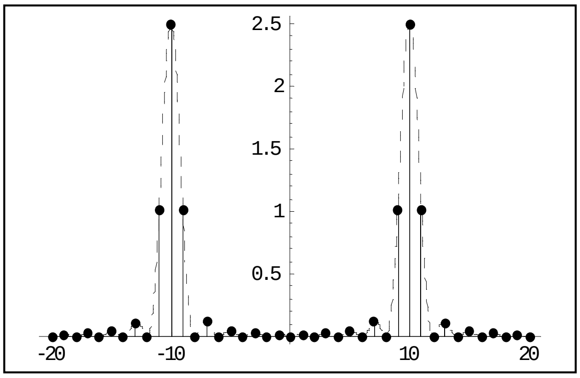
donde $c_{fn,\omega p}$ corresponde a los coeficientes del desarrollo en serie de la señal original, desplazados en frecuencia en la magnitud f_p; mientras que $c_{fn,-\omega p}$ corresponde a los coeficientes del desarrollo en serie de la señal original, desplazados en frecuencia en la magnitud $-f_p$.

En las figuras siguientes se reflejan respectivamente cada uno de los dos sumandos del espectro de amplitud de la señal modulada, $c_{fn,-\omega p}$ y $c_{fn,\omega p}$.





El espectro de amplitud completo de la señal modulada, c_{gn}, se refleja en la figura siguiente



Análogamente, para los armónicos podemos escribir

$$M_{gn} = M_{pn} + \frac{A_p m}{2} M_{fn,\omega_p} + \frac{A_p m}{2} M_{fn,-\omega_p}$$

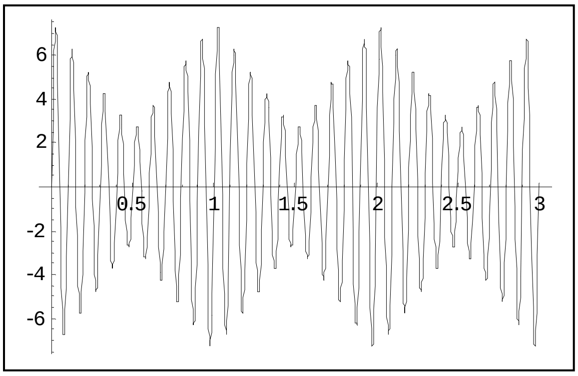
expresión en la que $M_{fn,\omega p}$ representa a los armónicos (bilaterales) correspondientes al espectro de la modulante centrado en ω_p.

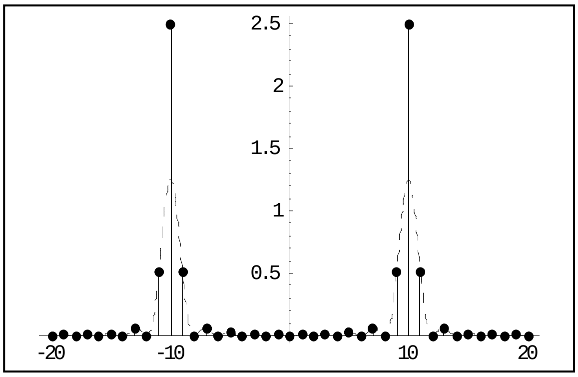
Los valores numéricos de los armónicos son los siguientes

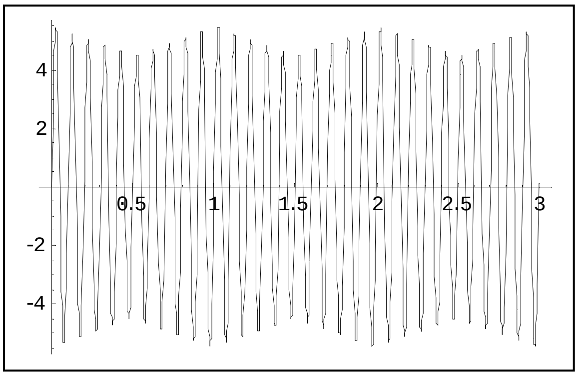
Frecuencia (en Khz.)	**Armónico** (en dBV)
0	-∞
1	-30.59
2	-∞
3	-28.47
4	-∞
5	-23.92
6	-∞
7	-15.69
8	-∞
9	3.15
10	10.97
11	3.14
12	-∞
13	-15.81
14	-∞
15	-24.49
16	-∞
17	-30.11
18	-∞
19	-34.25
20	-∞

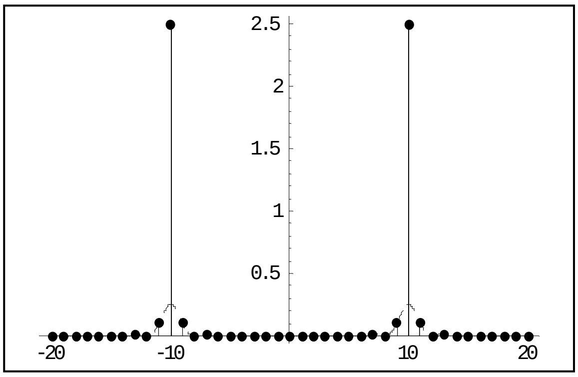
Apartado c)

En la figura se representan las señales moduladas y sus espectros cuando la amplitud de la modulante es, respectivamente, de 0.5V y de 0.1V.









Los valores numéricos de los armónicos son

Frecuencia (en Khz.)	**Armónico** (en dBV)		
	A=1V	A=0.5V	A=0.1V
0	-∞	-∞	-∞
1	-30.59	-36.61	-50.59
2	-∞	-∞	-∞
3	-28.47	-34.49	-48.47
4	-∞	-∞	-∞
5	-23.92	-29.94	-43.92
6	-∞	-∞	-∞
7	-15.69	-21.71	-35.69
8	-∞	-∞	-∞
9	3.15	-2.87	-16.85
10	10.97	10.97	10.97
11	3.14	-2.88	-16.86
12	-∞	-∞	-∞
13	-15.81	-21.83	-35.81
14	-∞	-∞	-∞
15	-24.49	-30.51	-44.49
16	-∞	-∞	-∞
17	-30.11	-36.14	-50.11
18	-∞	-∞	-∞
19	-34.25	-40.27	-54.25
20	-∞	-∞	-∞